N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

A.O. 7545

Article principal

recouvrant en tout

La THESE présentée

pour l'obtention

du grade de DOCTEUR ES SCIENCES

PHYSIQUE

A l'UNIVERSITE DE PARIS VI

par Monsieur Robert SADOURNY

Sujet de la thèse : Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géophysique.

soutenue le : 5 juillet 1972

devant la Commission d'examen composée de :

Monsieur le Professeur MALAVARD, Président
Monsieur le Professeur LIONS, Examinateur
Monsieur le Professeur MOREL, Rapporteur

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

A.O. 7545

Article principal

recouvrant en tout

La THESE présentée

pour l'obtention

du grade de DOCTEUR ES SCIENCES

PHYSIQUE

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

par Monsieur Robert SADOURNY

Sujet de la thèse : Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géophysique.

soutenue le : 5 juillet 1972

devant la Commission d'examen composée de :

Monsieur le Professeur MALAVARD, Président
Monsieur le Professeur LIONS, Examinateur
Monsieur le Professeur MOREL, Rapporteur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

A.O. 7545

Article principal

recouvrant en tout

La THESE présentée

pour l'obtention

du grade de DOCTEUR ES SCIENCES

PHYSIQUE

A l'UNIVERSITE DE PARIS VI

par Monsieur Robert SADOURNY

Sujet de la thèse : Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géophysique.

soutenue le : 5 juillet 1972

devant la Commission d'examen composée de :

Monsieur le Professeur MALAVARD, Président
Monsieur le Professeur LIONS, Examinateur
Monsieur le Professeur MOREL, Rapporteur

Ann. Géophys., t. 28, fasc. 4, 1972, p. 763 à 774

Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géophysique

Première Partie

par Robert SADOURNY

Laboratoire de Météorologie Dynamique du C.N.R.S.

RESUME. – *Des propriétés spectrales particulières aux équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement atmosphérique de grande échelle sont mises en évidence sur des formes bidimensionnelles simplifiées de ces équations : d'abord dans le cas d'un écoulement non-divergent, ensuite dans le cas d'un écoulement avec divergence, muni d'un processus d'ajustement géostrophique. L'étude permettra de réaliser par la suite des approximations en différences finies qui conduisent à des solutions numériques possédant des propriétés analogues. Ces classes d'approximations seront définies dans une deuxième partie (à paraître).*

SUMMARY – *Some spectral properties special to the Navier-Stokes equations when applied to large scale atmospheric motion are better described by using two-dimensional approximations : the quasi-horizontal flow is then considered as purely non-divergent or as a divergent flow subdued by some geostrophic adjustment mechanism. Our study will allow us to realize finite difference approximations with properties similar to those of the continuous system. Such classes of approximations will be defined in a following paper (Part II).*

Les phénomènes physiques dont dépend l'évolution de l'atmosphère sont trop complexes et trop variés pour entrer tous dans le cadre d'une théorie complètement générale. On est donc amené à concevoir des théories partielles ou "modèles" qui rendent compte seulement d'une partie des phénomènes, dans le cadre d'approximations spécifiques. Pour donner un exemple, il est nécessaire, pour l'étude de certains phénomènes relevant de la micro-échelle, de considérer l'atmosphère comme un amas discret, non déterministe, de molécules. Ce point de vue n'est déjà plus utilisable pour l'étude du mouvement des masses d'air à l'échelle de quelques mètres : a fortiori dans le cadre de la prévision du temps, où l'on ne s'intéresse qu'à des phénomènes dont l'échelle est supérieure à quelques kilomètres. Dans une première approximation, on considèrera donc l'atmosphère comme un fluide continu, défini par des champs de paramètres physiques dans un domaine tridimensionnel. Ces paramètres seront des vitesses ponctuelles, des variables d'état (pression, densité, température), et des variables définissant éventuellement la proportion de certains constituants, comme la vapeur d'eau ; un système d'équations aux dérivées partielles régissant ces paramètres (équations de Navier-Stokes, équation de la thermo-dynamique, équation du transport de la vapeur d'eau) définiront un modèle continu, utilisable à ces échelles.

On est conduit très vite à d'autres approximations. Les processus physiques qui font intervenir des phénomènes d'échelle inférieure à l'échelle considérée, voire des phénomènes d'échelle molèculaire, seront pris en compte de façon statistique, et représentés par des fonctions explicites des diverses variables physiques. C'est sous cette forme qu'interviendront dans les équations le refroidissement radiatif, la convection, les phénomènes turbulents de couche limite, l'évaporation et le dégagement de chaleur latente dû aux changements d'état de la vapeur d'eau, etc. Néanmoins, le modèle continu n'est pas directement utilisable car la complexité du comportement d'un modèle même simplifié, rend stérile la recherche de solutions analytiques : la prévision de ce type d'écoulement doit faire appel aux méthodes d'intégration numériques, nécessairement limitée à un nombre fini de paramètres. D'autre part, il est impossible de déterminer de façon exhaustive l'état du fluide à un instant donné ; cet état n'est connu que par l'intermédiaire d'un nombre fini de valeurs physiques discrètes. On est ainsi amené à simplifier à nouveau le problème, en remplaçant le fluide continu par un modèle discret fini.

Un des effets principaux de cette substitution est une modification des propriétés spectrales du système mécanique. Supposons que l'on procède à une analyse harmonique des divers champs de paramètres physiques – soit par l'intermédiaire de séries de Fourier si l'état du fluide est représenté par des coordonnées cartésiennes, soit par l'intermédiaire d'harmoniques sphériques si l'on s'intéresse à un écoulement sur la totalité de la sphère. Le passage du modèle continu au modèle discret s'accompagne d'une troncature des spectres avec l'élimination d'une infinité d'harmoniques. S'il s'agissait d'équations linéaires, les divers harmoniques évolueraient dans le temps indépendamment les uns des autres, et l'effet de la troncature se réduirait à des erreurs de phase dans le cas d'un modèle discrétisé. Or, ce n'est pas le cas pour les équations de Navier-Stokes, où la présence de termes inertiels non linéaires entraîne des interactions entre les divers harmoniques : négliger une infinité d'harmoniques revient à négliger une infinité d'interactions. Cette erreur n'est pas nécessairement réductible à une erreur de phase sur les ondes effectivement représentée comme il s'agit d'équations non linéaires, la distribution spectrale de l'énergie cinétique, par exemple, n'est pas invariante au cours du temps ; son évolution dépend étroitement des diverses interactions. Dans le cas d'un modèle discret, il est fréquent d'assister à une évolution totalement irréaliste de cette distribution spectrale, avec notamment l'accumulation artificielle d'énergie au voisinage de la troncature.

Une des qualités essentielles d'un modèle discret sera donc de reproduire correctement les interactions entre les différentes composantes spectrales, c'est-à-dire d'une manière analogue à un modèle continu. Il se trouve que les propriétés spectrales importantes sont liées aux propriétés de conservation de certaines intégrales spatiales par les équations de Navier-Stokes. On demandera donc aux équations discrétisées de satisfaire à des propriétés de conservation analogues. Dans une large mesure, ces propriétés suffiront pour obtenir une évolution réaliste des distributions spectrales : on admettra alors que les erreurs de troncature se réduisent à des erreurs de phase, comme dans le cas linéaire, et n'entraînent pas d'accumulation artificielle d'énergie à certains nombres d'onde. On ne peut toutefois garantir que ces erreurs sont faibles, ni que leur croissance est lente au cours de l'intégration.

On se placera enfin dans le cadre d'un problème plus restreint que celui de la prévision du temps en général : l'étude de la circulation générale de l'atmosphère planétaire. Autrement dit, on s'intéressera à la prévision à long terme de phénomènes dont l'échelle horizontale est de l'ordre du millier de kilomètres au moins. Cette restriction simplifie notablement le problème, et permet le recours à diverses approximations que nous détaillerons. C'est dans ce cadre qu'on définira, dans une première partie, des systèmes d'équations simplifiées, dont on décrira les diverses propriétés spectrales. On définira ensuite des modèles discrétisés ayant des propriétés les plus voisines possibles, d'abord dans le cas d'un écoulement dans un domaine homéomorphe à un domaine plan, ensuite dans le cas d'un écoulement sur la totalité de la sphère.

I – APPROXIMATIONS BIDIMENSIONNELLES DES EQUATIONS PRIMITIVES

Nous partirons des équations générales sous forme simplifiée, c'est-à-dire sans termes source :

$$\frac{d\underline{V}}{dt} + 2\underline{\Omega} \times \underline{V} + \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}\, P + g\underline{k} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho \underline{V}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(P^{-R/c} PT) = 0$$

$$P = \rho RT$$

où $\underline{V}$ représente le vecteur vitesse relative du fluide (à trois dimensions), $\underline{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire de la rotation de la planète, ρ la densité, g l'accélération de la pesanteur, $\underline{k}$ le vecteur unitaire dirigé

vers le haut suivant la verticale, P la pression, T la température, R la constante des gaz parfaits, et c_p la chaleur spécifique de l'air à pression constante ; d'autre part, grad et div sont les opérateurs différentiels usuels à trois dimensions. Le domaine considéré est une couronne sphérique, et nous laisserons de côté pour l'instant les conditions aux limites.

Si L est l'échelle des mouvements horizontaux, les mouvements de grande échelle sont définis par la condition $L > 1\,000$ km. La composante verticale de l'équation du mouvement peut être alors remplacée par la condition d'équilibre hydro-statique ; les équations ainsi modifiées sont appelées équations primitives. Si l'on ne conserve des équations primitives que les termes prédominants, on est conduit à des approximations supplémentaires. Nous en donnerons deux exemples : l'approximation bi-dimensionnelle divergente, et l'approximation bi-dimensionnelle non-divergente. Leurs propriétés dynamiques sont relativement proches de celles des équations primitives pour les mouvements de grande échelle, mais elles ont aussi des propriétés très particulières.

Il est important d'étudier d'abord le comportement des schémas numériques sur ces formes approchées. En effet, dans le traitement numérique des équations primitives, nous pouvons mettre en parallèle deux phénomènes :

1) l'effet dynamique de l'erreur de troncature sur les termes importants. Il peut être étudié isolément par l'analyse des équations approchées et de leur traitement numérique.

2) l'effet des termes moins importants, c'est-à-dire des termes particuliers aux équations primitives.

L'utilisation des équations primitives ne représente un progrès réel que si (1) est suffisamment faible devant (2). Il se trouve aussi que (1) est extrêmement sensible au choix des schémas numériques. C'est seulement dans la mesure où ceux-ci représentent correctement les propriétés dynamiques des équations approchées, par la vérification exacte de certaines contraintes intégrales, que l'effet dynamique de l'erreur de troncature sera faible. C'est donc à ces propriétés des équations approchées, et à leur représentation numérique, que nous allons nous intéresser. Cette étude nous conduira à des types de schémas optimaux pour les équations approchées, donc aussi pour les équations primitives.

On définira d'abord les diverses approximations possibles des équations primitives pour les mouvements de grande échelle. On utilisera le formalisme de l'analyse d'échelle introduite par Charney [5], et, dans la mesure où les résultats sont tout à fait classiques, on ne donnera pas les démonstrations. On remarque en premier lieu que l'échelle des mouvements verticaux (D) est au plus égale à la hauteur équivalente de l'atmosphère, soit une dizaine de kilomètres. On aura, pour les mouvements qui nous intéressent :

$$\delta = \frac{D}{L} \ll 1$$

Ceci est la condition classique de validité de l'approximation hydrostatique, qui permet de négliger l'accélération verticale dans les équations du mouvement. Par ailleurs, si l'on appelle V l'échelle de la vitesse horizontale et W l'échelle de la vitesse verticale, on a, toujours pour les mouvements de grande échelle :

$$\frac{W}{V} \sim \mathrm{Ro}\,\delta \ll \mathrm{Ro}$$

Ro étant le nombre de Rossby :

$$\mathrm{Ro} = \frac{V}{2\Omega L}$$

qui dépend à la fois de l'écoulement horizontal et de la vitesse angulaire de rotation de la terre (Ω). Pour un écoulement de grande échelle :

$$\mathrm{Ro} < 0.1$$

Le rapport W/V est très petit devant l'unité, et l'écoulement peut être considéré comme quasi-horizontal. On remarque que cette propriété n'est pas due uniquement à la géométrie de l'écoulement ($\delta \ll 1$) ; elle est accentuée par l'effet de la rotation terrestre, qui apparaît par l'intermédiaire du nombre de Rossby.

La troisième propriété fondamentale des mouvements de grande échelle est la quasi-incompressibilité. Les fluctuations relatives (horizontales) de la densité sont de l'ordre du nombre de Froude :

$$F = \frac{V^2}{gD}$$

où g représente l'accélération de la pesanteur. Pour les mouvements de grande échelle :

$$F < 10^{-2}$$

Enfin, les mouvements de grande échelle sont quasi-non-divergents. Si $\underline{V}$ est la vitesse horizontale de l'écoulement :

$$\mathrm{div}\ \underline{V} \sim \frac{V}{L}\,\mathrm{Ro}$$

On distinguera donc :

a) une approximation d'ordre zéro par rapport au nombre de Rossby : c'est l'approximation bi-dimensionnelle non-divergente.

b) une approximation d'ordre un par rapport au nombre de Rossby : c'est l'approximation bi-dimensionnelle divergente.

a) *L'approximation bi-dimensionnelle non-divergente*

L'approximation d'ordre zéro, par rapport au nombre de Rossby, de l'écoulement de grande échelle est un écoulement à la fois horizontal et non-divergent. Dans le cas d'un écoulement horizontal, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (f + \text{rot}\ \underline{V})\ \underline{K} \times \underline{V} + \underline{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}\ \underline{V} \cdot \underline{V}\right) = 0 \tag{3}$$

où rot et grad sont les opérateurs rotationnel et gradient appliqués à un champ de vecteurs à deux dimensions sur la sphère (le premier étant identifié à un scalaire), f est le paramètre de Coriolis, P est la pression, ρ la densité et $\underline{K}$ le vecteur unitaire normal à la sphère. Si l'on veut éviter de se placer dans un repère tournant avec la terre, on introduit la vitesse absolue $\underline{V}_a$:

$$\underline{V}_a = \underline{V} + a\Omega \cos\phi\, \underline{i}$$

où $\underline{i}$ est le vecteur unitaire le long du parallèle orienté, a est le rayon terrestre, ϕ la latitude. L'équation (3) s'écrit dans le repère absolu :

$$\frac{\partial \underline{V}_a}{\partial t} + (\text{rot}\ \underline{V}_a)\ \underline{K} \times \underline{V}_a + \underline{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}\ \underline{V}_a \cdot \underline{V}_a\right) = 0 \tag{4}$$

L'hypothèse de non-divergence

$$\text{div}\ \underline{V}_a = 0$$

Permet d'introduire une fonction de courant ψ dans le repère absolu :

$$\underline{V}_a = \underline{K} \times \underline{\text{grad}}\ \psi \tag{5}$$

On définit la vorticité absolue :

$$\eta = \text{rot}\ \underline{V}_a = \Delta\psi$$

et on obtient, en prenant le rotationnel de l'équation (4) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + J(\psi, \eta) = 0 \tag{6}$$

où J est l'opérateur jacobien sur la sphère. L'équation (6) représente l'approximation d'ordre zéro (par rapport à Ro) des mouvements de grande échelle.

L'équation (6) possède un certain nombre de propriétés intégrales dues au jacobien. Si S est le domaine sphérique :

$$\iint_S \psi^\alpha \eta^\beta J(\psi, \eta)\, dS = 0 \tag{7}$$

Ceci entraîne d'après (6) que tous les moments du type

$$\iint_S \eta^\beta\, dS$$

sont indépendants du temps. En particulier, l'intégrale de la vorticité, et l'enstrophie totale, ou intégrale du demi-carré de la vorticité :

$$Z = \iint_S \frac{1}{2}\, \eta^2\, dS$$

sont indépendantes du temps. Si l'on considère le fluide comme ayant une densité (bi-dimensionnelle) uniforme et égale à 1, (ce qui est compatible avec l'hypothèse de non-divergence), l'énergie cinétique totale s'écrit d'après (5) :

$$K = \iint_S \frac{1}{2}\ \underline{\text{grad}}\ \psi \cdot \text{grad}\ \psi\ ds$$

d'où il vient :

$$\frac{dK}{dt} = \iint_S \text{grad}\ \psi \cdot \underline{\text{grad}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) dS$$

Ceci s'écrit encore :

$$\frac{dK}{dt} = \iint_S - \psi\, \frac{\partial \eta}{\partial t}\, dS$$

La relation (7) entraîne donc également :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 0$$

et l'énergie cinétique est elle aussi indépendante du temps.

La conservation simultanée de Z et de K entraîne une propriété spectrale importante de l'approximation (6). Développons ψ en série des fonctions propres Λ_i de l'opérateur $-\Delta$ sur la sphère :

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\, \Lambda_i$$

Les Λ_i étant orthonormés au sens suivant :

$$\iint_S \Lambda_i \Lambda_j\, dS = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Les valeurs propres correspondant aux Λ_i sont :

$$\lambda_i = \frac{i(i+1)}{a^2}$$

Utilisant les expressions intégrales de K et Z, il vient :

$$2K = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, \psi_i^2$$

$$2K = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2\, \psi_i^2$$

Si l'on définit la densité spectrale d'énergie :

$$2K_i = \lambda_i \psi_i^2$$

on voit que la valeur moyenne des λ_i par rapport à la distribution spectrale de l'énergie, soit

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i K_i}{\sum_{i=1}^{\infty} K_i}$$

est indépendante du temps, puisque :

$$\bar{\lambda} = \frac{Z}{K}$$

En d'autres termes, l'indice i moyen par rapport à la distribution spectrale de l'énergie ne varie pas au cours du temps. Il n'y a pas de cascade systématique d'énergie vers les harmoniques sphériques d'ordre supérieur.

On peut considérer une forme un peu plus générale de (6) incluant des mécanismes de dissipation visqueuse :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + J(\eta, \psi) - \nu \nabla^2 \eta = 0 \qquad (8)$$

où ν est le coefficient cinématique de viscosité.

Un raisonnement analogue aux précédents conduit à une dissipation de l'énergie et de l'enstrophie dûe à la viscosité :

$$2\frac{dK}{dt} + \nu \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \psi_i^2 = 0$$

$$2\frac{dZ}{dt} + \nu \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^3 \psi_i^2 = 0$$

On peut prévoir dans ce cas une "remontée" globale de l'énergie vers les harmoniques d'ordre inférieur, dans la mesure où la dissipation opère principalement sur les harmoniques supérieurs. En fait, on peut écrire :

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \frac{1}{K^2}\left(K\frac{dZ}{dt} - Z\frac{dK}{dt}\right)$$

Si l'on développe en fonction des ψ_i :

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -\frac{\nu}{K^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_i \lambda_j^3 - \lambda_i^2 \lambda_j^2)\, \psi_i^2 \psi_j^2$$

ou encore, en symétrisant la partie sous les signes somme :

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\nu}{K^2} \sum_{i<j}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \lambda_i \lambda_j \psi_i^2 \psi_j^2$$

On a donc dans tous les cas

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} < 0 \qquad (9)$$

et il ne peut y avoir cascade globale d'énergie vers les harmoniques d'ordre supérieur.

Quand on utilise les équations non-divergentes pour représenter un écoulement de grande échelle, l'écoulement à $t = 0$ se situe dans une région limitée du spectre :

$$\lambda < \lambda_*$$

λ_* correspondant à une échelle L de l'ordre de 100 km par exemple.

Si l'on pose :

$$K_*(t) = \sum_{\lambda_i > \lambda_*} K_i(t)$$

On a $K_*(0) = 0$. On pose d'une façon analogue :

$$Z_*(t) = \sum_{\lambda_i > \lambda_*} \lambda_i K_i(t)$$

On peut alors écrire :

$$K_*(t) < \frac{Z_*(t)}{\lambda_*} < \frac{Z(t)}{\lambda_*}$$

ou encore :

$$K_*(t) < \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_*} K(0)$$

Si l'on prend λ_* suffisamment grand comparé à $\bar{\lambda}$, l'énergie $E_*(t)$ qui peut apparaître au cours de l'intégration dans des mouvements correspondant à $\lambda > \lambda_*$ est négligeable. L'écoulement reste un écoulement de grande échelle. En ce sens l'approximation non divergente est une approximation cohérente pour les mouvements de grande échelle. Ceux-ci apparaissent comme relativement autonomes en dépit de la non-linéarité des équations, ce qui justifie a postériori leur traitement séparé à l'aide d'équations filtrées.

b) *L'approximation bi-dimensionnelle divergente*

L'approximation d'ordre un par rapport au nombre de Rossby tient compte de la divergence, tout en conservant les hypothèses d'un écoulement hydrostatique et horizontal. Les équations sont alors celles d'un écoulement barotrope à deux dimensions, ou encore celles qui régissent les mouvements horizontaux d'un fluide de densité uniforme à surface supérieure libre :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (f + \mathrm{rot}\, \underline{V})\, \underline{K} \times \underline{V} + \underline{\mathrm{grad}}\, (\phi + \frac{1}{2}\, \underline{V}.\, \underline{V}) = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}\,(\phi\,\underline{V}) = 0$$

ϕ est ici le géopotentiel de la surface libre du fluide.

Cependant, une solution quelconque des équations (10) n'est pas nécessairement la description d'un écoulement de grande échelle. Il faut séparer deux types de solutions : les solutions quasi-non-divergentes, c'est-à-dire les solutions pour lesquelles

$$\text{div}\,\underline{V} \sim R_0\,\frac{V}{L}$$

sont celles qui nous intéressent en premier lieu, la propriété

$$\text{div}\,\underline{V} > R_0\,\frac{V}{L}$$

caractérise au contraire les ondes de gravité. On peut dire en première approximation que les équations (10) représentent non pas l'écoulement à un niveau donné, mais une moyenne verticale de l'écoulement : les ondes de gravité solutions de (10) correspondraient plutôt aux ondes de gravité externes de l'atmosphère réelle (on vérifie que leurs vitesses de phase respectives sont voisines, de l'ordre de 300 ms^{-1}, quand la hauteur moyenne de la surface libre du fluide est prise égale à la hauteur équivalente de l'atmosphère, une dizaine de kilomètres). Or, si les ondes de gravité externes existent bien dans l'atmosphère, elles contiennent beaucoup moins d'énergie que les ondes de Rossby. Elles sont donc contrôlées d'une manière ou d'une autre : une partie du mouvement divergent se transforme en mouvement rotationnel par l'effet du terme $\underline{k} \times \underline{V}$, le reste est amorti ou dispersé, au cours d'un processus d'origine complexe appelé processus d'ajustement géostrophique ; on le définit comme la tendance vers la non-divergence de l'écoulement au bout d'un temps infini.

Ce processus est-il contenu dans la dynamique représentée par les équations (10) ou au contraire, est-il le résultat de processus explicitement exclus par l'approximation bidimensionnelle divergente, qui ne conserve des équations complètes que la dynamique horizontale ? Cahn [4], puis Obukhov [6], ont effectué l'étude détaillée des équations (10), le premier dans le cas restreint de mouvements unidimensionnels, le second dans le cas général à deux dimensions (voir aussi Blumen [3]). Les conclusions de Cahn et Obukhov ont été reprises plus récemment par Arakawa [2]. Après une analyse de l'ordre de grandeur des différents termes, ils admettent pouvoir linéariser les équations, qui deviennent :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + f\underline{K} \times \underline{V} + \underline{\text{grad}}\ \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_0\ \text{div}\ \underline{V} = 0$$

ϕ_0 étant ici une valeur moyenne de ϕ. On peut alors former une équation autonome pour la divergence $D = \text{div}\ \underline{V}$.

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} + (f^2 - \phi_0\,\Delta)\,D = 0$$

La solution $D = 0$ est une solution particulière qui nous ramène au cas non-divergent. Plus généralement, les solutions propres sont données par :

$$D = D_0 \exp i(\nu t + \lambda x + \mu y)$$

dans le cas d'un domaine plan, avec

$$\nu^2 = f^2 + \phi_0\,(\lambda^2 + \mu^2)$$

Les solutions ont ainsi un caractère dispersif. Ceci veut dire que si l'on se donne une perturbation d'échelle finie à $t = 0$, elle se dispersera avec une vitesse égale à la vitesse de groupe. Dans le cas où le domaine est un domaine plan infini, la perturbation initiale s'étalera indéfiniment au cours du temps. Comme l'énergie totale du système ne varie pas, il en résulte que l'amplitude de la perturbation tendra vers zéro quand t tendra vers l'infini. Obukhov montre ainsi que grâce à ce caractère dispersif, l'écoulement devient non-divergent au bout d'un temps infini. Le processus d'ajustement géostrophique serait donc inclus dans le système (10).

En fait, les conclusions de Cahn, Obukhov et Arakawa sont critiquables dans la mesure où les équations (10) sont en fait utilisées pour représenter un écoulement dans un domaine borné. Les perturbations qui nous intéressent sont des perturbations de grande échelle : l'échelle du domaine est au plus égale à vingt ou trente fois l'échelle des perturbations. Les ondes de gravité déclenchées au temps $t = 0$ ne peuvent s'étaler indéfiniment avec le temps, mais reviennent interférer avec elles-même après avoir parcouru la circonférence de la terre. Dans ces conditions, il n'y a pas tendance vers la non-divergence au bout d'un temps infini. Les équations (10) appliquées aux mouvements de grande échelle sur la terre, ne contiennent pas de mécanisme dynamique d'ajustement géostrophique. Il en serait de même des équations primitives. Le contrôle des ondes de gravité fait nécessairement appel à des processus physiques (vraisemblablement divers). Par exemple, l'apparition d'une onde de gravité externe est liée à une montée globale des masses d'air dans l'atmosphère. Cette montée est alors nécessairement liée à une instabilité convective, d'où la génération de tourbillons qui à leur tour entraînent une dissipation d'énergie. Il est clair qu'un tel processus de contrôle est absent des équations (10) : on ne

peut faire mieux que de le représenter artificiellement sous la forme d'un terme dissipatif approprié. Par exemple, considérons le modèle modifié :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (f + \text{rot } \underline{V})\,\underline{K} \times \underline{V} + \underline{\text{grad}}\left(\phi + \frac{1}{2}\,\underline{V}\cdot\underline{V}\right) = \frac{K}{\phi_0}\,\underline{\text{grad}}\ \text{div}\,(\phi\,\underline{V}) \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}\,(\phi\,\underline{V}) = 0$$

K a ici la dimension d'un coefficient de diffusion cinématique, ϕ_0 la dimension d'un géopotentiel. Le terme dissipatif K/ϕ_0 $\underline{\text{grad}}$ div $(\phi\underline{V})$ introduit un mécanisme d'ajustement géostrophique.

En effet, l'énergie par unité d'aire s'écrit :

$$e = \frac{1}{2}\,\phi^2 + \frac{1}{2}\,\phi\,\underline{V}\cdot V$$

et sa dérivée partielle par rapport au temps :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \phi\,\underline{V}\cdot\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \left(\phi + \frac{1}{2}\,\underline{V}\cdot\underline{V}\right)\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

L'équation de l'énergie est alors la suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}\left[\left(\phi + \frac{1}{2}\,\underline{V}\cdot\underline{V}\right)\phi\,\underline{V}\right] = \frac{K}{\phi_0}\,\phi\,\underline{V}\cdot\underline{\text{grad}}\ \text{div}\,(\phi\,\underline{V})$$

Si l'on dénote par E l'énergie totale de l'écoulement :

$$E = \iint_S e\,dS$$

il vient :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{K}{\phi_0}\iint_S [\text{div}\,(\phi\,V)]^2\,dS \qquad (12)$$

L'énergie totale décroît avec le temps. Comme elle est positive elle tend vers une limite finie quand $t \to \infty$, et il en résulte :

$$\frac{dE}{dt} \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to \infty$$

ou en d'autres termes :

$$\iint_S [\text{div}\,(\phi\,V)]^2\,dS \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to \infty$$

On a bien réalisé ainsi un processus d'ajustement géostrophique, puisque la divergence de la quantité de mouvement tend vers zéro en moyenne quadratique au bout d'un temps infini. Si l'on s'intéresse à l'écoulement limite quand $t \to \infty$, on peut remarquer que le champ du géopotentiel est alors stationnaire :

$$\iint_S \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 dS \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to \infty$$

A la limite, l'écoulement est analogue à ceux étudiés dans le paragraphe A : la stationnarité du géopotentiel pour t infini ne semble pas correspondre à un écoulement trivial, mais plutôt au découplage de l'équation de continuité et de l'équation du mouvement, qui caractérise l'écoulement non divergent. Nous verrons un exemple de ce comportement dans les tests numériques de la deuxième partie.

Contrairement à l'approximation non-divergente, les approximations (10) et (11) satisfont deux propriétés de conservation seulement. La première est la conservation de la masse totale. Elle s'exprime par la relation

$$\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial t}\,dS = 0$$

En effet, le géopotentiel joue ici le rôle d'une densité bidimensionnelle, et la masse totale du fluide est représentée par

$$M = \iint_S \frac{\rho_0}{g_0}\,\phi\,dS$$

où ρ_0 est la densité, supposée uniforme, et g_0 l'accélération de la pesanteur, également uniforme. La deuxième propriété est la conservation de l'énergie. Elle est exprimée par (12) au terme dissipatif près.

Il n'y a pas, au sens strict, conservation de l'enstrophie dans le cas des équations (10) et (11). Cependant, dans le cas des équations (11), l'écoulement devient non-divergent à la limite. Comme l'enstrophie d'un écoulement non-divergent est stationnaire, on peut prévoir une contrainte du type :

$$\frac{dZ}{dt} \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to \infty$$

Toutefois, l'écoulement limite diffère des écoulements étudiés au paragraphe (a), par la présence d'une densité ϕ non nécessairement uniforme bien que stationnaire, la condition div $(\phi\underline{V}) = 0$ remplaçant la condition div $\underline{V} = 0$.

Pour étudier l'évolution de l'enstrophie, on écrit l'équation de la vorticité absolue, déduite des équations du mouvement sous la forme (10) ou (11) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}\,(\eta\underline{V}) = 0$$

Cette équation, combinée à l'équation de continuité en ϕ, nous conduit à l'équation de la vorticité potentielle η/ϕ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{\phi}\right) = 0$$

qui entraîne

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{\phi}\right)^{\alpha} = 0$$

quelque soit α. Cette dernière équation, combinée une nouvelle fois à l'équation de continuité, équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\left(\frac{\eta}{\phi}\right)^{\alpha}\right) + \text{div}\left(\phi\left(\frac{\eta}{\phi}\right)^{\alpha}\ \underline{V}\right) = 0$$

On définit l'enstrophie potentielle totale

$$Z'(t) = \int\int_S \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\phi}\right)^2 \phi\, ds$$

c'est-à-dire, l'intégrale par rapport à la masse du carré de la vorticité potentielle. Prenant $\alpha = 2$, on obtient :

$$\frac{dZ'}{dt} = 0 \qquad (13)$$

Ainsi, l'enstrophie potentielle totale est exactement conservée dans un écoulement bidimensionnel avec divergence.

Dans le cas des équations (11) l'enstrophie potentielle de l'écoulement limite non-divergent sera donc égale à l'enstrophie potentielle initiale. L'écoulement limite sera régi par l'équation :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + J\left(\frac{\eta}{\phi}, \Psi'\right) = 0 \qquad (14)$$

où ϕ est une densité indépendante du temps, et Ψ' la fonction de courant dont dérive la quantité de mouvement :

$$\phi \underline{V} = \underline{k} \times \underline{\text{grad}}\ \Psi'$$

On peut étudier le comportement spectral de l'écoulement limite d'une façon analogue à l'étude du paragraphe (*a*). Il suffira d'introduire le produit scalaire :

$$<f, g> = \int\int_S \phi\, fg\, ds$$

et l'opérateur A :

$$Af = \frac{1}{\phi}\,\text{div}\left(\frac{1}{\phi}\,\text{grad}\, f\right)$$

qui remplacera le laplacien. Il s'agit bien d'un opérateur symétrique

$$<Af, g> = \int\int_S g\ \text{div}\left(\frac{1}{\phi}\,\text{grad}\, f\right) dS$$

$$= -\int\int_S \frac{1}{\phi}\,\text{grad}\, f\,.\,\text{grad}\, g\, dS$$

$$= <f, Ag>$$

qui admet donc un système complet de fonctions propres Λ'_n orthonormées par rapport au produit scalaire, de valeurs propres (réelles négatives) $-\lambda'_n$. L'énergie cinétique totale s'écrit :

$$K' = \int\int_S \frac{1}{2}\,\phi\, V^2\, dS$$

$$= \int\int_S \frac{1}{2}\,\frac{1}{\phi}\,\underline{\text{grad}}\ \Psi'\,.\,\underline{\text{grad}}\ \Psi'\, dS$$

$$= \int\int_S -\frac{1}{2}\,\Psi'\,\text{div}\left(\frac{1}{\phi}\,\underline{\text{grad}}\ \Psi'\right) dS$$

$$= -\frac{1}{2} <\Psi', A\Psi'>$$

De même, l'enstrophie potentielle totale s'écrit :

$$Z' = \frac{1}{2} <A\Psi', A\Psi'>$$

Les mêmes raisonnements que ceux effectués au paragraphe (*a*) conduisent à des propriétés spectrales analogues : l'indice n moyen du spectre par rapport à la densité d'énergie

$$K'_n = \frac{1}{2}\,\lambda'_n\,\Psi'^2_n$$

est conservé au cours du temps.

En résumé, les contraintes liées à l'enstrophie potentielle apparaissent comme très importantes dans un écoulement bidimensionnel divergent, possédant un mécanisme d'ajustement géostrophique. Ces contraintes sont liées aux propriétés de conservation du jacobien dans l'équation (14) ; dans le cas d'un modèle discrétisé, les solutions numériques auront des propriétés spectrales analogues si le jacobien discrétisé possède les mêmes propriétés.

c) *La conservation de l'enstrophie dans les approximations numériques*

L'étude numérique des équations primitives ou des équations approchées peut se faire, soit au moyen de modèles spectraux tronqués, soit au moyen d'équations discrétisées sur des réseaux géométriques. Pour des raisons d'ordre pratique, les premiers sont relativement peu utilisés, bien que certains groupes de recherche s'essayent aujourd'hui à en améliorer les méthodes : entre autre Robert [9] et Orszag [7]. Nous nous intéressons ici exclusivement aux approximations sur des réseaux de points.

Considérons en premier lieu l'approximation bidimensionnelle non-divergente. Une première tentative d'intégration numérique, due à Phillips [8], conduisit à une solution irréaliste du point de vue physique, caractérisée par une accumulation artificielle de l'énergie au voisinage de la troncature

du spectre au bout d'un temps assez bref. L'analyse, aujourd'hui classique, de ce phénomène a été faite par Arakawa [1].

Un modèle non-divergent discrétisé sera défini par un réseau R de points M_i $(i = 1,N)$ sur la sphère, et des équations :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \tilde{J}(n, \psi) = 0 \qquad (15)$$
$$\eta = \tilde{\Delta}(\psi)$$

où $\tilde{J}$ et $\tilde{\Delta}$ sont des approximations sur le réseau R des opérateurs sphériques jacobien et laplacien. L'erreur de troncature introduite par le modèle (13) a un effet dynamique faible dans la mesure où les solutions de (13) ont des propriétés —en particulier spectrales— analogues aux propriétés des solutions de (6).

Si l'on se réfère au paragraphe a), on est conduit à définir des formes numériques approchées de l'énergie et de l'enstrophie totales :

$$2\tilde{K} = \Sigma - \psi \eta s$$
$$2\tilde{Z} = \Sigma \eta^2 s$$

Nous appliquons ici la convention suivante, utilisée systématiquement par la suite, qu'une sommation muette représente une sommation sur tous les points du réseau R. La quantité s est l'élément d'aire associé à un point du réseau :

$$S = \Sigma s$$

La donnée de s définit dans R^N un produit scalaire naturel pour notre problème, que nous noterons :

$$< f, g > = \Sigma\, fgs$$

avec
$$f = (f_i)_{i=1,N}$$
$$g = (g_i)_{i=1,N}$$

$\tilde{\Delta}$ est un opérateur linéaire dans R^N. Nous le supposons symétrique, c'est-à-dire tel que :

$$< f, \tilde{\Delta} g > = < \tilde{\Delta} f, g > \qquad (16)$$

Dans ces conditions, les vecteurs propres de $-\tilde{\Delta}$ peuvent être choisis de façon à constituer un système orthonormé :

$$< \tilde{\Lambda}_i , \tilde{\Lambda}_j > = \delta_{ij}$$

On peut alors développer comme au paragraphe *a*) la fonction de courant ψ en fonction des $\tilde{\Lambda}_i$:

$$\psi = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\psi}_i \tilde{\Lambda}_i$$

Si l'on suppose que l'opérateur $-\tilde{\Delta}$ définit une forme quadratique définie positive, les valeurs propres $\tilde{\lambda}_i$ correspondant aux $\tilde{\Lambda}_i$ seront strictement positives. Nous aurons :

$$2\tilde{K} = - < \psi , \tilde{\Delta} \psi > = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\lambda}\, \tilde{\psi}^2$$

$$2\tilde{Z} = < \tilde{\Delta}\, \psi , \tilde{\Delta} \psi > = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\lambda}_i^2\, \tilde{\psi}_i^2$$

On définira une densité spectrale d'énergie :

$$2\tilde{K}_i = \tilde{\lambda}_i\, \tilde{\psi}_i^2$$

et une valeur moyenne des λ_i par rapport à cette densité spectrale :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\lambda}_i \tilde{K}_i}{\tilde{K}}$$

Nous avons alors :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{Z}}{\tilde{K}}$$

Pour que $\tilde{\lambda}$ ne dépende pas du temps, on imposera à (15) d'entraîner la conservation exacte de $\tilde{K}$ et de $\tilde{Z}$. Il faudra donc que l'opérateur $\tilde{J}$ vérifie les relations :

$$< \psi , \tilde{J}(\eta , \psi) > = 0$$
$$< \eta , \tilde{J}(\eta , \psi) > = 0$$

Ceci signifie que $\tilde{J}$ doit être un opérateur doublement antisymétrique, c'est-à-dire antisymétrique à la fois en tant qu'opérateur linéaire en η, et en tant qu'opérateur linéaire en ψ. La conservation de $\tilde{\lambda}$ entraîne qu'il ne peut pas se produire alors d'accumulation systématique d'énergie au voisinage de la troncature, ce qui avait lieu dans le modèle de Phillips. Le comportement des solutions du modèle discrétisé est analogue au comportement des solutions du modèle analytique.

Arakawa [1] a le premier introduit une forme discrétisée du jacobien plan sur un réseau carré, possédant les propriétés de conservation de K et de Z. Le problème sphérique a été traité de façon analogue sur un réseau à maille triangulaire dérivé de l'icosaèdre régulier, par Sadourny, Arakawa et Mintz [10], et par Williamson [11], qui ont donné les formes correspondantes du jacobien et du laplacien.

La conservation exacte de l'enstrophie n'entraîne pas a priori la stabilité numérique au sens mathématique du terme. Elle entraîne néanmoins que η est uniformément borné quel que soit t pour un réseau R donné. Dans un récent article [2] Arakawa montre, à l'aide de tests numériques, que la conservation formelle de l'énergie a peu d'importance dès lors que l'enstrophie est exactement conservée : la sen-

sibilité de l'enstrophie aux nombres d'onde élevés est telle qu'il suffit de conserver $\widetilde{Z}$ pour contrôler efficacement la cascade de l'énergie au voisinage de la troncature. Ceci peut s'expliquer de la façon suivante.

Dans le modèle (15), les N valeurs propres $\widetilde{\lambda}_i$ définissent un spectre tronqué :

$$\widetilde{\lambda}_1 < \widetilde{\lambda}_i < \widetilde{\lambda}$$

$\widetilde{\lambda}_*$ dépend de la résolution du réseau. Si d est une mesure de cette résolution, $\widetilde{\lambda}_* \to \infty$ quand $d \to 0$. Par contre $\widetilde{\lambda}_1$ varie peu ; si l'opérateur $\widetilde{\Delta}$ est une approximation consistante de Δ, $\widetilde{\lambda}_1 \to \lambda_1 = \frac{2}{a^2}$ quand $d \to 0$, de sorte qu'on peut écrire

$$\lambda_0 < \widetilde{\lambda}_i < \widetilde{\lambda}_*$$

où $\lambda_0 = \lambda_1 - \alpha$ est indépendant de la résolution ; ceci étant valable au delà d'une certaine résolution pour ϵ fixé. Il en résulte que :

$$\frac{\widetilde{Z}}{\widetilde{\lambda}_*} < \frac{\widetilde{Z}}{\widetilde{\lambda}} < \frac{\widetilde{Z}}{\lambda_0}$$

ou encore :

$$\widetilde{K}(t) < \frac{\widetilde{Z}}{\lambda_0}$$

La conservation exacte de l'enstrophie seule entraîne que l'énergie est uniformément bornée quelle que soit la résolution. De plus, si l'on suppose $\widetilde{\lambda}$ suffisamment proche de λ_1, ce qui est vérifié dans un écoulement de grande échelle, la marge de croissance de l'énergie sera très faible ; c'est ce qui se produit dans les tests d'Arakawa (figure 1).

Supposons au contraire que le jacobien $\widetilde{J}$ conserve exactement l'énergie seule. On peut alors écrire :

$$\widetilde{Z}(t) < \widetilde{\lambda}\widetilde{K}$$

qui donne pour l'enstrophie une borne indépendante du temps. Néanmoins, cette borne tend vers l'infini quand $d \to 0$. La conservation de l'énergie est donc une contrainte très secondaire pour l'approximation (15). C'est la conservation de l'enstrophie qui garantit à celle seule un comportement spectral correct des solutions, quelle que soit la résolution du modèle.

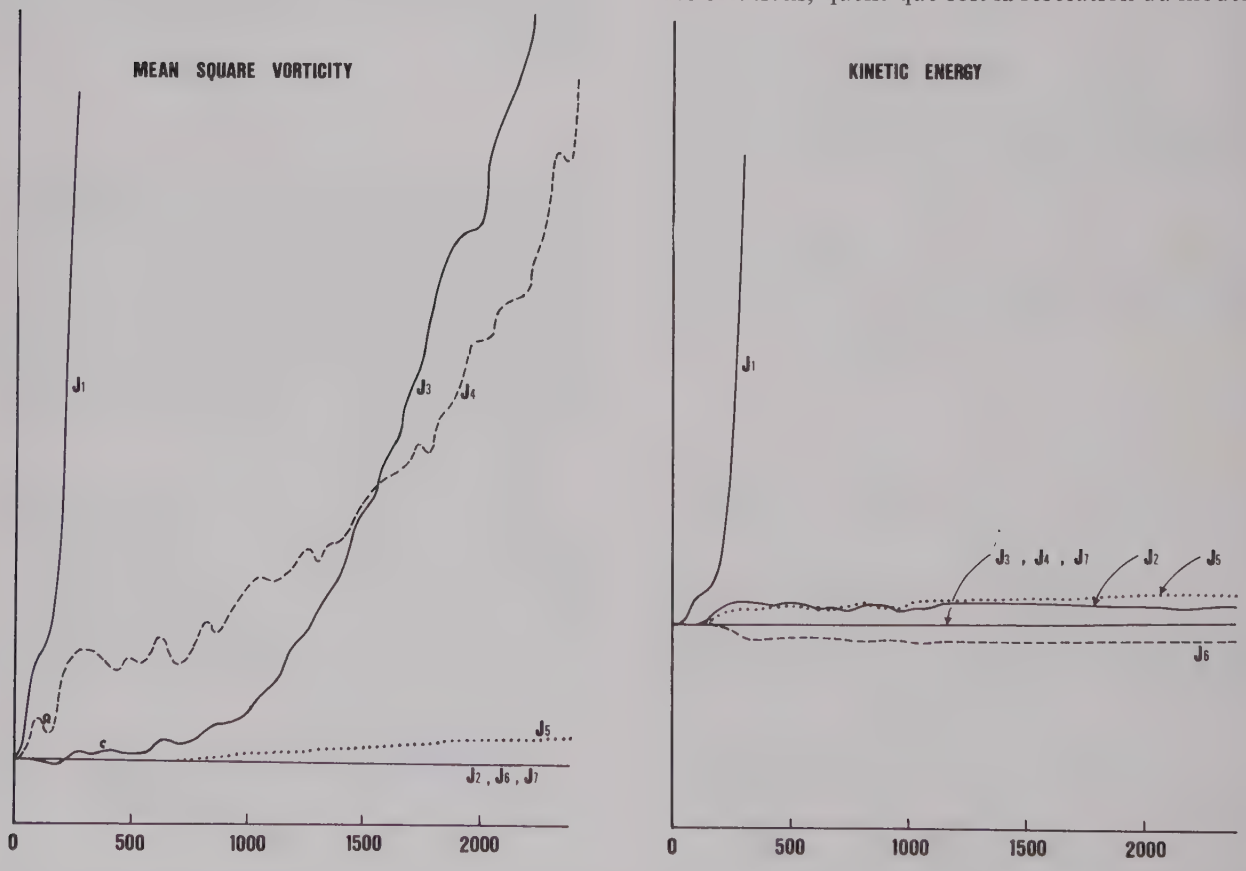

Fig. 1

Evolution de l'enstrophie (mean square vorticity) et de l'énergie cinétique (mean kinetic energy), au cours d'intégrations numériques effectuées avec différents jacobiens. Les jacobiens J2, J6, J7 conservent formellement l'enstrophie, les jacobiens J3, J4, J7 conservent formellement l'énergie cinétique. En abscisse, le nombre de pas d'intégration.

CONCLUSION

L'étude des approximations à deux dimensions des équations primitives nous a conduit à des propriétés spectrales importantes, liées à la conservation de l'énergie d'une part, et, d'autre part, à la conservation de l'enstrophie (dans le cas de l'approximation non divergente), ou de l'enstrophie potentielle (dans le cas de l'approximation divergente munie d'un mécanisme d'ajustement géostrophique). Pour ces deux problèmes, l'obtention de solutions numériques approchées possédant des propriétés spectrales analogues impose l'utilisation de formes discrétisées satisfaisant aux mêmes propriétés de conservation. La définition de ces formes pour un écoulement sur un domaine sphérique homéomorphe au plan sera l'objet d'une deuxième partie.

Manuscrit reçu le 5 avril 1972

REFERENCES

[1] Arakawa A., "Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion : Part I.J.", *Comput. Physics,* **1**, 119-143, 1966.

[2] Arakawa A., "Numerical simulation of large scale atmospheric motions", *Proc. Symp. Numerical Solutions of Field Problems in Continuum Physics.* Durham, 1968, Amer. Math. Soc.

[3] Blumen W., "On nonlinear geostrophic adjustment", *Journal of the Atmospheric Sciences,* **24**, pp. 325-332, 1967.

[4] Cahn A.Jr., "An investigation of the free oscillations of a simple current system". *J. of Meteorology,* Vol. 2, June 1945, pp. 113-119.

[5] Charney J., "On the scale of atmospheric motions", *Geophys. Publ.,* **17**, No. 2, 1948.
Voir aussi : *Planetary Fluid Dynamics,* Cours d'été de Lannion, 1970, Gordon and Breach (à paraître).

[6] Obukhov A., "On the question of geostrophic winds", *Serya Geofisica i Geologya,* Vol. 13, No. 4, Isvestiia, Akademia Nauk, Jul-Aug 1949, 281-306.

[7] Orszag S.A., "Transform Method for the calculation of vector-coupled sums : Application to the spectral form of the vorticity equation". NCAR Manuscript 70-13, National Center for Atmospheric Research, Boulder, 1970.

[8] Phillips N., "An example of non-linear computational instability". *The atmosphere and the sea in motion,* pp. 501-504, Rockfeller Institute Press and Oxford Univ. Press, 1949.

[9] Robert A., "The integration of a spectral model of the atmosphere by the implicit method". *Proc. WMO-IUGG Symp. on Numerical Weather Prediction,* VII, 19-24, 1968.

[10] Sadourny R., Arakawa A. et Mintz Y., "Integration of the non divergent vorticity equation with an icosahedral hexagonal grid for the sphere". *Monthly Weather Review,* Vol. 96, No. 6, June 1968.

[11] Williamson D., "Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid". *Tellus,* Vol. 20, No. 4, pp .642-653, 1968.

Ann. Géophys., t. 28, fasc. 4, 1972, p. 775 à 788

Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géophysique

Deuxième Partie :

Approximations spatiales sur un domaine homéomorphe à un domaine plan

par Robert SADOURNY

Laboratoire de Météorologie Dynamique du C.N.R.S.

RESUME. – *On a donné dans une première partie les formes approchées des équations de Navier-Stokes pour un écoulement atmosphérique de grande échelle, en mettant en évidence la relation entre certaines propriétés spectrales des solutions, et certains invariants intégraux. On se propose maintenant de déterminer une classe générale d'approximations en différences finies satisfaisant aux mêmes propriétés d'invariance, dans le cas d'un écoulement avec divergence sur un domaine sphérique homéomorphe à un domaine plan. Ces méthodes sont ensuite appliquées au cas d'un réseau hexagonal, où une disposition particulière du réseau des vecteurs vitesse par rapport au réseau des scalaires permet d'obtenir en outre des propriétés particulièrement satisfaisantes pour les diagrammes de dispersion.*

SUMMARY. – *In the first part of the paper, approximate forms of the Navier-Stokes equations have been written for large scale atmospheric motion, emphasizing the close relationship between spectral properties and the conservation of certain quadratic integrals. Our purpose now is to build a general class of finite difference approximations constrained to the same invariance properties, in the case of divergent flow on a spherical domain homeomorphic to a single domain on a plane. The methods are then applied to a hexagonal array, where a special positioning of the velocity vectors with respect to the scalar gridpoints allows satisfactory properties for the dispertion diagrams as well.*

Dans une première partie [7], nous avons donné deux approximations bidimensionnelles des équations générales de la météorologie appliquées aux mouvements de grande échelle : l'approximation non divergente, et l'approximation divergente munie d'un processus d'ajustement géostrophique. Dans les deux cas, nous avons vu que les phénomènes de cascade d'énergie à travers l'étendue du spectre étaient limités par l'existence de propriétés de conservation pour l'énergie totale et l'enstrophie (ou l'enstrophie potentielle totale). C'est à la réalisation de ces propriétés de conservation dans des modèles discrétisés que nous allons désormais nous intéresser.

Le cas de l'approximation non divergente, où l'écoulement dépend d'une seule variable scalaire, vorticité ou fonction de courant, a déjà été traité [1] [3] [6]. Nous considérerons ici le cas de l'approximation divergente, sous la forme donnée précédemment :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (f + \mathrm{rot}\ \underline{V})\,\underline{K} \times \underline{V} + \mathrm{grad}\left(\phi + \frac{1}{2}\,\underline{V}\,.\,\underline{V}\right) = \frac{k}{\phi_0}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,(\phi V) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \underline{V}) = 0$$

où ϕ est le géopotentiel de la surface libre, $\underline{V}$ le vecteur vitesse, k/ϕ_0 un coefficient de diffusion (où k a la dimension d'un coefficient de diffusion cinématique et ϕ_0 celle d'un géopotentiel), f le paramètre de Coriolis et $\underline{K}$ le vecteur unitaire normal à l'écoulement, dirigé vers le haut.

Le traitement numérique exige le remplacement de (1) par des équations scalaires, exprimées nécessairement en coordonnées curvilignes. Le système de coordonnées n'est pas nécessairement unique pour tout le domaine. En particulier, il ne peut être unique si le domaine de l'écoulement s'étend à la totalité de la sphère.

Dans un premier temps, nous considérerons le problème d'un écoulement limité à un domaine sphérique S homéomorphe à un domaine plan P. On peut, dans ce cas, utiliser un système de coordonnées unique, ce système sera défini par une application de S sur P, non nécessairement conforme. On définira ensuite un réseau dans le domaine P, que l'on choisira en principe régulier, afin de minimiser les erreurs de troncature.

Dans la mesure où il n'existe pas de frontière naturelle limitant l'écoulement atmosphérique à un tel domaine, le problème ainsi défini n'a de réalité physique que dans le cas où les conditions aux limites dépendent du temps et permettent des flux non nuls à travers les frontières, sous l'influence de conditions extérieures au domaine représenté. Ce problème sera traité entre autres dans la troisième partie. Pour l'instant, nous considèrerons que la frontière du domaine est une paroi rigide sans frottement. La condition aux limites se réduit alors à l'annulation du flux à travers la paroi.

a) Systèmes d'équations scalaires

On se donne une application ¶ de classe C_∞ de S sur P, supposé borné. On appellera ∂S le bord de S, ∂P le bord de P. On pose

$$m = ¶(M)$$

où M appartient à S, m appartient à P. On appelle $x^i (i = 1,2)$ les coordonnées de m dans un repère cartésien donné ; un champ de vecteurs tangents à la sphère est alors défini soit par l'intermédiaire de composantes covariantes u_i :

$$u_i = \underline{V} \cdot \frac{\partial M}{\partial x^i}$$

soit par l'intermédiaire de composantes contravariantes u^i :

$$V = u^i \frac{\partial M}{\partial x^i}$$

La convention usuelle de sommation des indices sera toujours appliquée dans la suite. La géométrie locale est définie par le tenseur covariant

$$g_{ij} = \frac{\partial M}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial M}{\partial x^j}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs à deux dimensions sera identifié à un scalaire, et on utilisera la notation

$$g = \frac{\partial M}{\partial x^1} \times \frac{\partial M}{\partial x^2} = (\det (g_{ij}))^{1/2}$$

On suppose ici que l'application ¶ a été choisie de telle sorte que le déterminant des g_{ij} est positif. Le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs $\underline{A}$ et $\underline{B}$ s'écrivent alors respectivement :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = a_i b^i$$

$$\underline{A} \times \underline{B} = g \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}$$

Si l'on se donne un élément de courbe $d\underline{c}$ sur la sphère, de composantes contravariantes dc^i, il lui correspond pour le champ de vecteurs une circulation infinitésimale :

$$\underline{V} \cdot d\underline{c} = u_i \, dc^i$$

et un flux infinitésimal :

$$\underline{V} \times d\underline{c} = g \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ dc^1 & dc^2 \end{vmatrix}$$

qui définissent des formes différentielles indépendantes du choix de l'application ¶. Parallèlement, les expressions scalaires du rotationnel et de la divergence seront les suivantes :

$$\operatorname{rot} \underline{V} = \frac{1}{g} \epsilon^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x^i}$$

$$\operatorname{div} \underline{V} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^i} (g u^i)$$

avec la notation :

$$(\epsilon^{ij}) = (\epsilon_{ij}) = \begin{vmatrix} \epsilon^{11} & \epsilon^{12} \\ \epsilon^{21} & \epsilon^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On obtient ainsi la formulation scalaire des équations (1), après multiplication scalaire de l'équation du mouvement par $\partial M/\partial x^i$; si l'on remarque que

$$(\underline{K} \times \underline{V}) \cdot \frac{\partial M}{\partial x^i} = \underline{V} \times \frac{\partial M}{\partial x^i} = g \epsilon_{ij} \, u^j$$

on peut écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \epsilon_{ij}\, u^j \left(gf + \epsilon^{kl}\, \frac{\partial u_l}{\partial x^k}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\phi + \frac{1}{2}\, u_k\, u^k\right) = 0 \quad (2)$$

$$g\, \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\,(g\phi u^i) = 0$$

Pour compléter le système, il convient d'ajouter l'expression des composantes contravariantes en fonction des composantes covariantes :

$$u^i = g^{ij}\, u_j$$

où la matrice (g^{ij}) est l'inverse de la matrice (g_{ij}). Si ¶ est une transformation conforme, les deux matrices sont des matrices scalaires : les formes (2) ne sont pas autrement simplifiées.

L'aire du domaine S s'écrit :

$$\Sigma = \int\int_P g\, dx^1\, dx^2$$

L'intégrale spatiale du géopotentiel, équivalant à la masse totale du fluide, s'écrit de même :

$$\Phi = \int\int_P g\phi\, dx^1\, dx^2$$

L'énergie par unité d'aire sur la sphère s'écrit :

$$e = \frac{1}{2}\, \phi^2 + \frac{1}{2}\, \phi u_k\, u^k$$

De sorte que l'énergie totale a pour expression :

$$E = \int\int_P g\left(\frac{1}{2}\, \phi^2 + \frac{1}{2}\, \phi u_k\, u^k\right) dx^1\, dx^2$$

et

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \left(\phi + \frac{1}{2}\, u_k\, u^k\right)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi u^i\, \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

ou encore, en utilisant (2) :

$$g\, \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g\phi u^i \left(\phi + \frac{1}{2}\, u_k\, u^k\right)\right) = 0$$

ce qui donne finalement les équations scalaires exprimant la conservation de la masse et de l'énergie :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_{\partial P} g\phi \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ dc^1 & dc^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \int_{\partial P} \left(\phi + \frac{1}{2}\, u_k\, u^k\right) g\phi \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ dc^1 & dc^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

La condition aux limites (paroi rigide sans frottement) s'exprime simplement par la nullité du flux à travers la frontière ∂S, ou en d'autres termes, par :

$$\begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ dc^1 & dc^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial P \quad (4)$$

On obtient alors une conservation exacte de la masse et de l'énergie.

Enfin, la forme scalaire de l'équation de la vorticité, avec les notations du paragraphe I,c), est la suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon^{ij}\, \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\eta}{\phi}\, \frac{\partial \psi'}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\eta}{\phi}\, g g^{ij}\, \frac{\partial \chi'}{\partial x^i}\right) = 0 \quad (5)$$

b) Approximations en différences finies

Dans le domaine plan P, on se donne deux réseaux R' et R''. Les quantités ϕ (ainsi que, éventuellement, Ψ' et χ'), seront définies aux points du réseau R', les quantités u_i et u^i seront définies aux points du réseau R''. Les réseaux R' et R'' peuvent coïncider ; les nombres de points figurant dans R' et R'' sont N' et N'' respectivement.

Pour définir des approximations en différences finies des équations (2), on aura besoin :

(i) d'opérateurs de moyenne A' et A''. A' est une application linéaire de $R^{N''}$ dans $R^{N'}$: par exemple, $A'u_i$ définit la vitesse covariante sur le réseau R'. A'' est une application linéaire de $R^{N'}$ dans $R^{N''}$; par exemple, $A''\phi$ définit le géopotentiel sur le réseau R''.

(ii) d'approximations en différences finies des opérateurs de dérivation. Les approximations en différences finies des opérateurs div, rot et grad seront définies respectivement à l'aide d'opérateurs δ'_j, Δ'_j (applications linéaires de $R^{N'}$ dans $R^{N'}$) et δ''_j (application linéaire de $R^{N'}$ dans $R^{N''}$), qui seront tous trois des approximations de $\partial/\partial x^j$.

Ces divers opérateurs permettent de définir pour (2) l'approximation en différences finies suivante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \epsilon_{ij}\, A''(g\phi)\, u^j\, A''\left(\frac{\widetilde{\eta}}{\phi}\right) + \\ + \delta''_i\left(\phi + \frac{1}{2}\, A'(u_k\, u^k)\right) = 0 \quad (6)$$

$$g\, \frac{\partial \phi}{\partial t} + \delta'_i\,(A''(g\phi)\, u^i) = 0$$

où $\widetilde{\eta}$ est une approximation en différences finies de η sur R'.

Afin d'étudier les diverses propriétés de conservation, nous sommes amenés à introduire deux produits scalaires, l'un dans $R^{N'}$, l'autre dans $R^{N''}$. A chaque point de R' ou de R'' on associe un élément d'aire s tel que l'aire totale du domaine S s'écrit :

$$\Sigma = \sum_{R'} g\, s = \sum_{R''} g\, s$$

Le produit scalaire dans $R^{N'}$ est défini par :

$$<\phi\,,\,\psi> = \sum_{R'} \phi\psi s$$

Le produit scalaire dans $R^{N''}$ est défini par :

$$<<u\,,\,v>> = \sum_{R''} uv\, s$$

On définira une approximation de l'énergie totale, par exemple :

$$\widetilde{E} = \frac{1}{2} <g\phi\,,\,\phi + A'(u_k\, u^k)>$$

Sa dérivée en fonction du temps peut s'écrire :

$$\frac{d\widetilde{E}}{dt} = \left\langle g\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\,,\,\phi + \frac{1}{2}\,A'(u_k\, u^k)\right\rangle + \left\langle g\phi\,,\,A'\left(u^k\,\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)\right\rangle$$

Cette relation étant difficilement utilisable sous cette forme on imposera aux opérateurs de moyenne la propriété de symétrie :

$$<\phi\,,\,A'\,u> = <<A''\,\phi\,,\,u>> \qquad (7)$$

On obtient dans ces conditions :

$$\frac{d\widetilde{E}}{dt} = \left\langle g\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\,,\,\phi + \frac{1}{2}\,A'(u_k\, u^k)\right\rangle + \left\langle\!\!\left\langle A''(g\phi)\,u^k\,,\,\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\rangle\!\!\right\rangle$$

Utilisant maintenant les équations (22), il vient :

$$\frac{d\widetilde{E}}{dt} = \left\langle \delta'_i\,(A''(g\phi)\,u^i\,,\,\phi + \frac{1}{2}\,A'(u_k\, u^k)\right\rangle + \left\langle\!\!\left\langle A''(g\phi)\,u^i\,,\,\delta''_i\left(\phi + \frac{1}{2}\,A'(u_k\, u^k)\right)\right\rangle\!\!\right\rangle$$

La conservation exacte de l'énergie équivaut donc à une relation d'antisymétrie entre les opérateurs aux différences :

$$<\delta'_i\,u\,,\,\phi> + <<u\,,\,\delta''_i\,\phi>> = 0 \qquad (8)$$

Dans la pratique, on se donnera a priori l'opérateur δ''_i. L'opérateur δ'_i sera alors déterminé par la relation (8). On peut remarquer que (8) définit implicitement, par l'intermédiaire de la conservation de l'énergie, une forme discrétisée de la condition aux limites (4), en imposant une forme particulière de l'opérateur divergence sur le bord du réseau R'.

Si l'on suppose que l'opérateur δ''_i est consistant, on a nécessairement :

$$\delta''_i\,(l) = 0$$

où la notation l représente un champ de paramètres tous égaux à l sur le réseau R'. On déduit alors de (8) :

$$<\delta'_i\,u\,,\,l> = 0$$

qui entraîne, en prenant $u = A''(g\phi)\,u^i$, la conservation de la masse.

On s'intéresse maintenant à la contrainte relative à l'enstrophie. A l'aide d'opérateurs Δ'_k analogues aux δ'_k, on pose :

$$\widetilde{\eta} = f + \frac{1}{g}\,\epsilon^{kl}\,\Delta'_k u_1$$

Pour obtenir une équation analogue à l'équation de la vorticité (5), il faudra retrouver en différences finies la propriété que le rotationnel d'un gradient est nul, c'est-à-dire ici :

$$\epsilon^{ij}\,\Delta'_i\,\delta''_i = 0 \qquad (10)$$

qui équivaut à la permutabilité des directions de dérivation en différences finies.

Pour traiter de façon complète la contrainte relative à l'enstrophie, il faut décomposer la quantité de mouvement en une partie purement divergente et une partie purement rotationnelle, au sens des approximations en différences finies. On posera :

$$\epsilon_{ij}\,A''(g\phi)\,u^j = \delta''_i\,\psi' + \epsilon_{ij}\,gg^{jk}\,\delta''_k\,\chi' \qquad (11)$$

Les champs scalaires ψ' et χ' sont définis sur R'.

D'une façon générale, les opérateurs Δ'_j peuvent être choisis indépendamment des opérateurs δ'_j.

On a trouvé pour δ'_j une forme simplifiée (antisymétrique de δ''_j) grâce aux conditions aux limites particulières sur les flux (la nullité des flux sortants). Ces conditions sont les formes discrétisées de (4) sur tous les points frontières ; nous n'avons pas eu besoin de les expliciter. Si l'on veut, elles définissent un sous espace vectoriel de $R^{N''} \times R^{N''}$, que nous appellerons F, et auquel appartiennent les flux, c'est-à-dire tous les vecteurs de la forme $(hu^1,\ hu^2)$ où h est un champ scalaire quelconque défini sur R''. L'opérateur $\underline{\delta'} = (\delta'_1,\ \delta'_2)$ a en fait été défini sur F.

Il est naturel d'imposer à Δ'_j de coïncider avec δ'_j sur le sous espace F :

$$\Delta'_j\,(hu^j) = \delta'_j\,(hu^j) \qquad (12)$$

mais prendre $\Delta'_j = \delta'_j$, et l'appliquer tel quel aux composantes covariantes signifierait que la circulation elle aussi est nulle le long de la frontière. Ce choix n'est compatible qu'avec la condition aux limites

$$\underline{V} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D$$

En général, on se limitera à imposer la relation (12). Elle entraîne entre autres, que Δ'_j ne diffère de δ'_j que sur les points frontières, là où les flux nuls sont remplacés par des circulations non-nulles.

L'équation de la vorticité s'écrit alors :

$$g\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t} + \delta'_j\left(A''(g\phi)\,u^j A''\left(\frac{\tilde{\eta}}{\phi}\right)\right) = 0$$

ou encore :

$$g\frac{\partial\eta}{\partial t} - \epsilon^{ij}\,\delta'_j\left(A''\left(\frac{\eta}{\phi}\right)\delta''_i\,\psi'\right) + \\ + \delta'_j\left(A''\left(\frac{\tilde{\eta}}{\phi}\right) g g^{jk}\,\delta''_k\,\chi\right) = 0$$

La contrainte relative à l'enstrophie sera vérifiée si :

$$\left\langle \frac{\eta}{\phi}\,,\ \epsilon^{ij}\,\delta'_j\left(A''\left(\frac{\eta}{\phi}\right)\delta''_i\,\psi'\right)\right\rangle = 0 \qquad (13)$$

On peut donner une condition plus simple en tenant compte de la propriété (12). La relation (13) équivaut à :

$$\left\langle\!\!\left\langle \epsilon^{ij}\,\delta''_j\left(\frac{\tilde{\eta}}{\phi}\right),\ A''\left(\frac{\tilde{\eta}}{\phi}\right)\delta''_i\,\psi'\right\rangle\!\!\right\rangle = 0$$

ou encore :

$$\left\langle \epsilon^{ij}\,\delta'_i\left(A''\left(\frac{\tilde{\eta}}{\phi}\right)\delta''_j\left(\frac{\tilde{\eta}}{\phi}\right)\right),\ \psi'\right\rangle = 0$$

quel que soit ψ', ce qui équivaut à la propriété :

$$\epsilon^{ij}\,\delta'_i\,(A''(\phi)\,\delta''_j(\phi)) = 0 \qquad (14)$$

La relation (14) n'est autre que l'annulation du jacobien $J(\phi, \phi)$ en différences finies, sous la forme qui se déduit directement de l'équation du mouvement. Comme elle n'est pas sous forme intégrée, elle est facilement vérifiable.

En conclusion, les formes approchées des équations garantissent la conservation de la masse, de l'énergie, et la "conservation" de l'enstrophie, si les relations (7), (8), (12) et (14) sont vérifées par les opérateurs discrétisés.

c) Un exemple de schéma numérique sur un réseau hexagonal

On se propose d'intégrer numériquement les équations (1) sur un domaine hémisphérique (par exemple, sur l'hémisphère nord). L'application ¶ la plus commode est la projection stéréographique, qui, étant une application conforme, conduit à une légère simplification des équations. La matrice des g_{ij} est une matrice scalaire. Si l'origine du repère cartésien dans le domaine P est placée au point image du pôle, on a :

$$g = g_{11} = g_{22} = \frac{16a^4}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + 4a^2)^2}$$

Le domaine P est limité par le cercle de rayon $2a$. On se donne un réseau hexagonal régulier, de longueur de maille d. La frontière du réseau n'est pas exactement circulaire, on peut définir les points frontières de telle façon qu'elle soit la plus proche possible de la frontière réelle (figure 1). Ce réseau constituera le réseau R'. Les composantes de la vitesse (u_1, u_2) seront définies aux centres des triangles, qui constituent ainsi le réseau R''. On désignera dans la suite un point de R' par la notation m', un point de R'' par la notation m''.

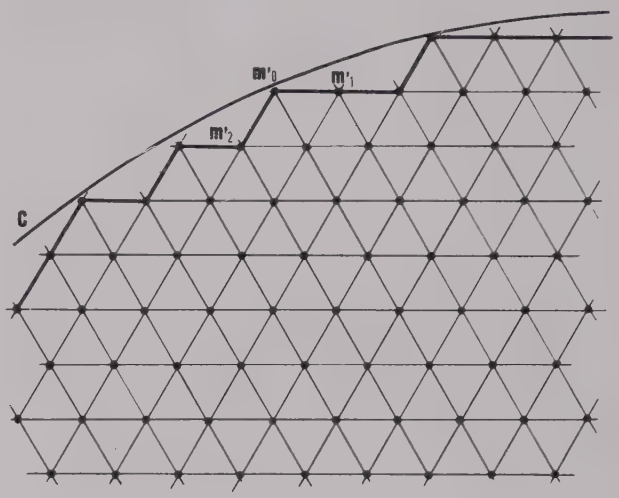

Fig. 1

Frontière approchant le cercle quand d tend vers 0. Seul le réseau R' est représenté.

Etant donnés deux points m' et m'', on définit :

$$s(m', m'') = \frac{d^2}{4\sqrt{3}} \text{ si } m' \text{ et } m'' \text{ sont contigüs}$$
$$0 \quad \text{dans le cas contraire}$$

cette quantité correspondant à l'aire hachurée sur la figure 2.

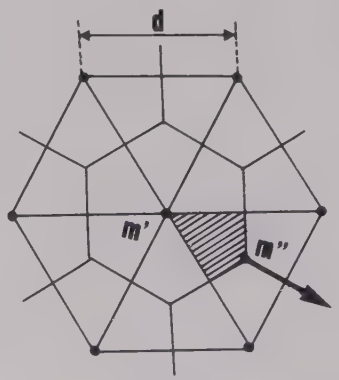

Fig. 2

Si l'on considère un triangle de centre m'', son aire est donnée par :

$$s(m'') = \sum_{R'} s(m', m'')$$

L'opérateur A'' sera défini par :

$$s(m'')\, A''\, \phi(m'') = \sum_{R'} s(m', m'')\, \phi(m') \quad (15)$$

(ce n'est autre que la moyenne arithmétique sur trois points). On a donc :

$$<<u\,,\, A''\phi>> = \sum_{R', R''} u(m'')\, s(m', m'')\, \phi(m')$$

De même, l'aire relative à un point du réseau R' sera définie par :

$$s(m') = \sum_{R''} s(m', m'')$$

et l'opérateur A' par :

$$s(m')\, A' u(m') = \sum_{R''} s(m', m'')\, u(m'') \quad (16)$$

ce qui donne :

$$<A' u\,,\, \phi> = \sum_{R', R''} \phi(m')\, s(m', m'')\, u(m'')$$

La propriété (7) est ainsi vérifiée.

D'une manière analogue, pour tout couple (m', m''), on peut appeler $\underline{n}(m', m'')$ le vecteur dirigé de m' vers m'' et de module :

$\frac{d}{2}$ si m' et m'' sont contigüs

0 dans le cas contraire.

On définit alors un opérateur différentiel discrétisé $\underline{\delta}''$ au point m'' par la relation :

$$s(m'')\, \underline{\delta}''\, \phi(m'') = -\sum_{R'} \underline{n}(m', m'')\, \phi(m') \quad (17)$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien d'un opérateur consistant, du premier ordre, défini sur un triangle. Les quantités $\delta_i'' \phi(m'')$ seront définies comme les composantes de ce vecteur dans le repère cartésien. On a, $n_i(m', m'')$ étant les composantes de $\underline{n}(m', m'')$:

$$<<u\,,\, \delta_i''\phi>> = -\sum_{R', R''} u(m'')\, n_i(m', m'')\, \phi(m')$$

De façon analogue, on définira l'opérateur δ_i' au point m' à l'aide d'une relation "antisymétrique" par rapport à la précédente :

$$s(m')\, \underline{\delta}'\, u(m') = \sum_{R''} \underline{n}\,(m', m'')\, u(m'') \quad (18)$$

L'opérateur défini par cette relation est en fait l'opérateur différentiel discrétisé le plus simple à six points, si l'on est à l'intérieur du réseau. On peut vérifier qu'il est du second ordre. On obtient ainsi :

$$<\underline{\delta}'\, u\,,\, \phi> = \sum_{R', R''} \phi(m')\, \underline{n}\,(m', m'')\, u(m'')$$

La propriété (8) est ainsi vérifiée.

Soit un point particulier m_0' entouré des points $m_a'\,(a = 1,6)$. On appelle m_a'' le centre du triangle (m_0', m_a', m_{a+1}'). L'opérateur gradient s'explicite alors sous la forme :

$$\underline{\delta}''\phi(m_a'') = -\frac{4}{d^2\sqrt{3}}(\phi(m_a')\, \underline{n}(m_a', m_a'') +$$

$$+ \phi(m_{a+1}')\, \underline{n}(m_{a+1}', m_a'') + \phi(m_0')\, \underline{n}(m_0', m_a''))$$

La disposition des points est indiquée sur la figure 3.

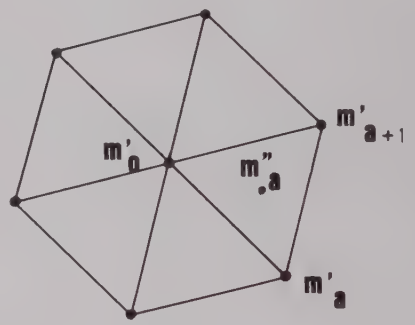

Fig. 3

De même, l'opérateur $\underline{\delta}'$ s'explicite ainsi :

$$\delta' u(m_0') = \frac{2}{d^2\sqrt{3}} \sum_{a=1}^{6} u(m_a'')\, \underline{n}(m_0', m_a'') \quad (19)$$

Le jacobien $J(\phi, \phi)$, sous la forme (29), peut s'écrire :

$$J(\phi, \phi) = \frac{2}{d^2\sqrt{3}} \sum_{a=1}^{6} A''\phi(m_a'')\, \underline{n}(m_0', m_a'') \times$$

$$\times\, \delta''\phi(m_a'')$$

ou encore :

$$J(\phi, \phi) = -\frac{8}{9d^4} \sum_{a=1}^{6} (\phi(m_0') + \phi(m_a') +$$

$$+ \phi(m_{a+1}'))\, \underline{n}(m_0', m_a'') \times (\phi(m_a')\, \underline{n}(m_a', m_a'') +$$

$$+ \phi(m_{a+1}')\, \underline{n}(m_{a+1}', m_a''))$$

(l'indice $a + 1$ étant calculé modulo 6). On utilise les relations :

$$\underline{n}(m_0', m_a'') \times \underline{n}(m_a', m_a'') = -\frac{3d^2}{8\sqrt{3}}$$

$$\underline{n}(m'_0, m''_a) \times \underline{n}(m'_{a+1}, m''_a) = \frac{3d^2}{8\sqrt{3}}$$

qui nous donnent :

$$J(\phi, \phi) = \frac{1}{3d^2\sqrt{3}} \sum_{a=1}^{6} (\phi(m'_0) + \phi(m'_a) + \phi(m'_{a+1}))\,(\phi(m'_{a+1}) - \phi(m'_a))$$

On a bien :

$$J(\phi, \phi) = 0$$

et la relation (14) est vérifiée.

La forme que nous avons donné pour l'opérateur $\underline{\delta}'$ est en fait une forme "flux" : la divergence en un point du réseau R' s'exprime à partir de la formule (19) comme une somme de flux dirigés suivant les vecteurs $\underline{n}(m', m'')$ qui entourent le point. En un point frontière, un certain nombre de ces vecteurs sont absents, ce qui exprime le fait qu'il n'y a pas de flux sortant du domaine. Si m'_0 et m'_1 sont deux points consécutifs de la frontière, on suppose ainsi que le flux élémentaire à travers $m'_0\, m'_1$ est nul. Si m'_0 est un point "anguleux" (voir figure) la nullité des flux à travers $m'_0 m'_1$ et $m'_0 m'_2$ entraîne implicitement la nullité du vecteur vitesse en m'_0.

Donnons nous une suite de réseaux de frontière $\overline{R}'_n$ de longueur de maille d'_n et supposons que d'_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Si on appelle C le cercle de rayon $2a$, et $\overline{R}'$ la réunion des $\overline{R}'_n$, le choix de la frontière est tel que C est l'ensemble dérivé de $\overline{R}'$, c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation de $\overline{R}'$. Si on appelle $\overline{C}'$ le sous-ensemble de $\overline{R}'$ formé des points anguleux uniquement, il est clair que C est aussi l'ensemble dérivé de $\overline{C}'$. Ceci entraîne que la condition aux limites que nous avons donnée n'est compatible qu'avec un écoulement dont la vitesse est nulle sur le bord de C. Cette condition est beaucoup plus restrictive que la condition (4) définie initialement. Si l'on utilise le réseau de la figure 1 pour un écoulement vérifiant la condition aux limites "forte" :

$$\underline{V} = 0 \quad \text{sur} \quad C$$

La formulation donnée est complète. Les circulations élémentaires sur le bord du réseau sont nulles, et l'opérateur $\underline{\Delta}$ utilisé pour le rotationnel ne diffère pas de l'opérateur $\underline{\delta}$. Toutes les conditions de conservation sont vérifiées.

Si l'on veut traiter le problème général sous la condition aux limites (4), il faut soit abandonner les conditions de conservation, soit changer la définition de la frontière. Nous choisirons la deuxième méthode. Dans la mesure où la présence d'un mur à l'équateur est une condition artificielle sans réelle signification physique, on remplacera le domaine P par un domaine hexagonal de dimension voisine, représenté partiellement sur la figure 4. Dans ce cas, les circulations sur le bord du réseau ne sont pas nulles ; dans la mesure où les vecteurs vitesse sont définis aux centres des triangles, elles n'apparaissent pas directement parmi les variables dépendantes du problème. Si l'on veut définir correctement l'opérateur $\underline{\Delta}$ comme une modification appropriée de l'opérateur $\underline{\delta}$ sur la frontière, on est conduit à définir explicitement ces circulations. On placera la frontière à une distance h du bord du réseau ; les composantes covariantes u_i de la vitesse le long de la nouvelle frontière seront disposées comme il est indiqué sur la figure 4. Si l'on conserve les notations précédentes, on a ainsi étendu légèrement le réseau R'' au-delà du réseau R'. Si m' et m'' appartiennent respectivement aux frontières de R' et R'', on définit :

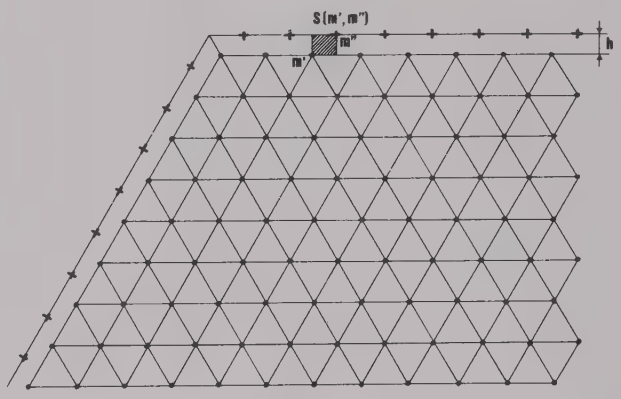

Fig. 4

Réseau hexagonal à frontière hexagonale, montrant la disposition des circulations sur la frontière.

$$s(m', m'') = \frac{dh}{2} \quad \text{si } m' \text{ et } m'' \text{ sont voisins}$$

$$0 \quad \text{dans le cas contraire.}$$

et $\underline{n}(m', m'')$ comme un vecteur parallèle à la frontière, orienté comme la projection de $m'\, m''$ sur la frontière, ayant pour module :

h si m' et m'' sont voisins

0 dans le cas contraire.

Les opérateurs A', A'', $\underline{\delta}'$, $\underline{\delta}''$ sont définis comme précédemment. On améliore l'approximation sur la frontière en s'arrangeant pour que l'opérateur A' soit du second ordre partout, ce qui a lieu pour

$$h = \frac{d}{\sqrt{6}}$$

(A' n'est pas formellement du second ordre aux six sommets de la frontière de R ; mais la vitesse

s'annule au voisinage de ces points, et $A'\left(\frac{1}{2}\,\underline{V}^2\right)$ est de toute façon du second ordre en d). On vérifie facilement alors la consistance du schéma en tout point.

Il reste à définir l'opérateur Δ'. Nous définirons des vecteurs $\underline{n}'(m', m'')$ comme suit :

Si m' et m'' n'appartiennent pas simultanément aux frontières de R' et R'' respectivement, on prend :

$$\underline{n}'(m', m'') = \underline{n}(m', m'')$$

Dans le cas contraire, $\underline{n}'(m', m'')$ sera le vecteur perpendiculaire à la frontière, dirigé vers l'extérieur du domaine, ayant pour module :

d si m' et m'' sont voisins

0 dans le cas contraire.

L'opérateur $\underline{\Delta}'$ est ensuite défini de la même manière que l'opérateur $\underline{\delta}'$, en remplaçant les vecteurs $\underline{n}(m', m'')$ par $\underline{n}'(m', m'')$.

On voit facilement que ces modifications de frontière n'ont aucun effet sur les quatre propriétés de conservation, qui demeurent exactement vérifiées.

d) Propriétés de dispersion du schéma numérique

On se propose ici d'étudier le schéma introduit au paragraphe précédent sur les équations linéarisées. A cet effet nous procédons d'abord à l'étude de la troncature sur un réseau hexagonal régulier R', que l'on supposera étendu à l'infini dans le plan.

Le réseau sera placé par rapport aux coordonnées x^1 et x^2 comme il est indiqué sur la figure 5. Le procédé d'indexation des points, à deux indices m et n, est également indiqué sur la figure. Si l'on considère les deux ondes :

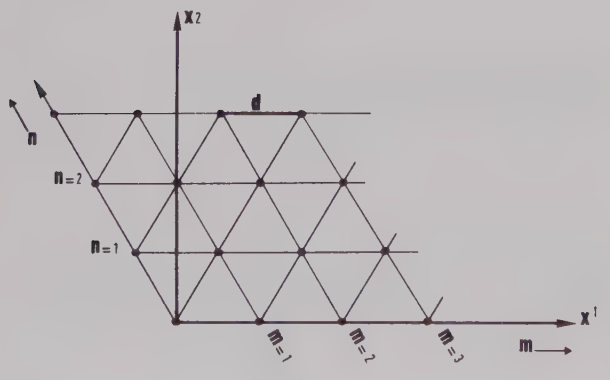

Fig. 5

$$\phi(x^1, x^2) = \phi_0 \exp i(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2)$$

$$\phi'(x^1, x^2) = \phi_0 \exp i(\lambda'_1 x^1 + \lambda'_2 x^2)$$

elles coïncident sur R' à la condition suivante :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\left(m - \frac{n}{2}\right) + (\lambda_2 - \lambda'_2)\, n\, \frac{\sqrt{3}}{2} = k\, \frac{2\pi}{d}$$

où k est un entier quelconque. Si dans le plan (λ_1, λ_2) on définit les coordonnées

$$\lambda = \lambda_1$$

$$\mu = -\frac{1}{2}\,\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda_2$$

la relation ci-dessus s'écrit :

$$(\lambda - \lambda')\, m + (\mu - \mu')\, n = k\, \frac{2\pi}{d}$$

et définit les périodes en (λ, μ) :

$$\lambda - \lambda' = k_1\, \frac{2\pi}{d}$$

$$\mu - \mu' = k_2\, \frac{2\pi}{d}$$

représentées par les points sur la figure 6. Dans le plan du vecteur d'onde la troncature s'effectue donc à la frontière de l'hexagone hachuré, de côté $\frac{4}{3}\,\pi d$.

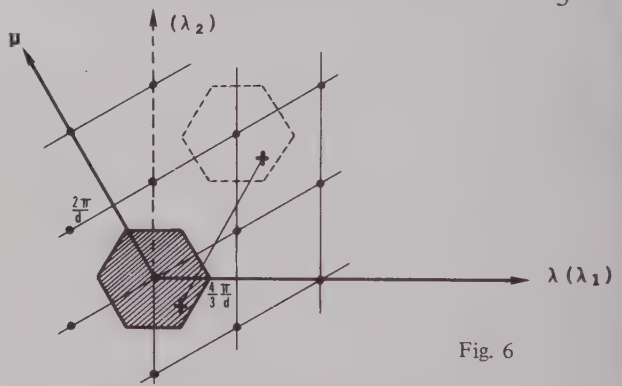

Fig. 6

Les équations linéarisées conduisent (voir I.b) à une approximation en différences finies pour l'équation de la divergence :

$$\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial t} + (f^2 - \phi_0 \widetilde{\Delta})\, \widetilde{D} = 0$$

$\widetilde{D}$ est ici l'approximation en différences finies de la divergence, $\widetilde{\Delta}$ l'approximation de l'opérateur laplacien déduit des opérateurs divergence et gradient définis dans (II,c). Si l'on reprend l'indexation de la figure 4, on obtient :

$$\widetilde{\Delta}\widetilde{D}(m'_0) = \frac{2}{3d^2} \sum_a \left(\widetilde{D}(m'_a) - \widetilde{D}(m'_0)\right)$$

Si on définit $\widetilde{D}$ par une onde unique de vecteur d'onde (λ_1, λ_2), la fréquence déduite de l'équation de la divergence s'écrit :

$$\tilde{\nu} = f^2 + \frac{8}{3}\frac{\phi_0}{d^2}\left(\sin^2\left(\lambda_1 \frac{d}{2}\right) + \sin^2\left(\left(\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2\right)\frac{d}{2}\right) + \sin^2\left(\left(\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2\right)\frac{d}{2}\right)\right)$$

au lieu de la fréquence exacte

$$\nu = f^2 + \phi_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$$

La fréquence exacte $\nu(\lambda_1, \lambda_2)$ est isotrope dans le plan (λ_1, λ_2), elle ne dépend que du module du vecteur d'onde. Il n'en est pas de même de l'approximation $\tilde{\nu}(\lambda_1, \lambda_2)$. On a représenté dans la figure 7 la surface de dispersion du schéma, c'est-à-dire la surface d'équation $\nu = \tilde{\nu}(\lambda_1, \lambda_2)$ dans l'espace $(\lambda_1, \lambda_2, \nu)$, limitée à l'hexagone de troncature. On a représenté également la surface de dispersion obtenue par un schéma analogue sur un réseau à maille carrée.

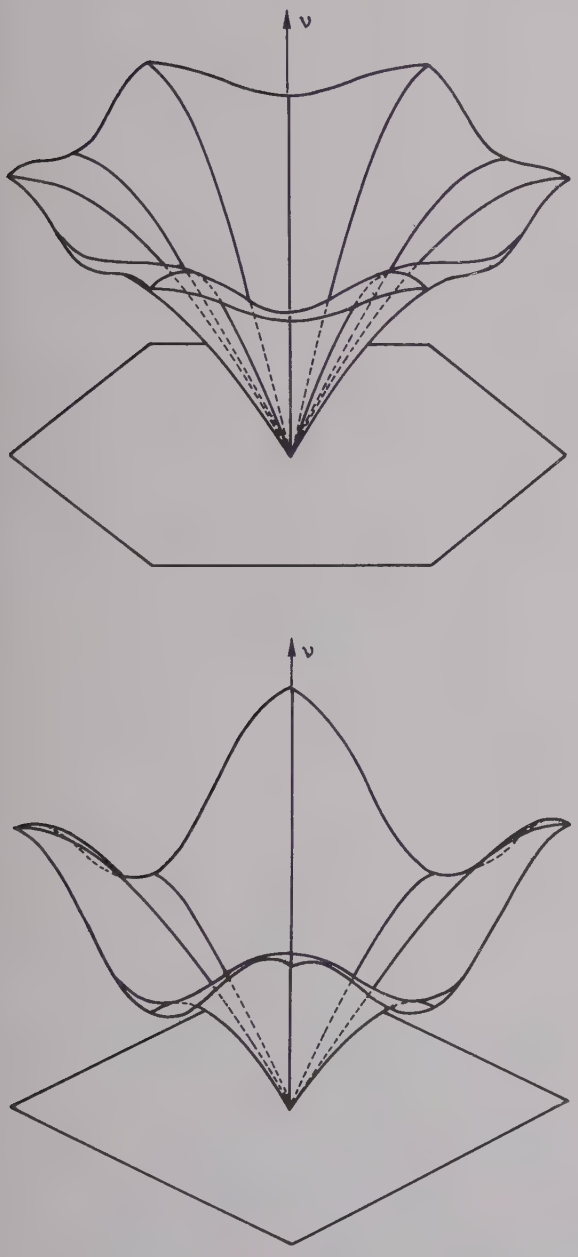

Fig. 7

Surfaces de dispersion donnant la fréquence ν en fonction du vecteur d'onde dans le cas du schéma hexagonal (en haut) et dans le cas d'un schéma carré analogue (en bas).

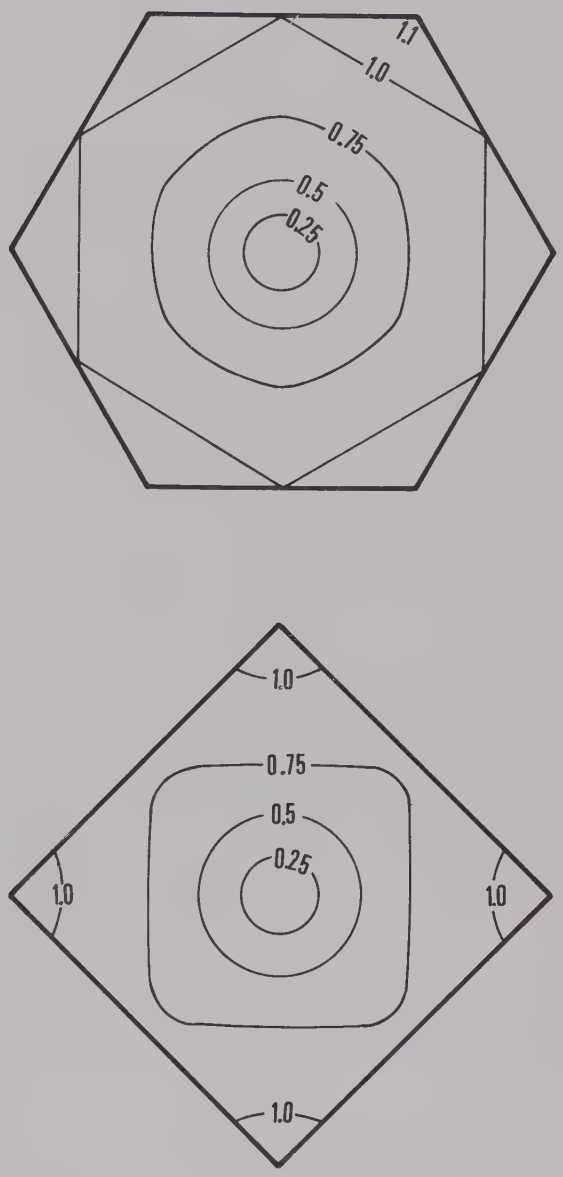

Fig. 7 (suite)

Lignes de niveau des surfaces de dispersion.

On voit ainsi que le schéma hexagonal conduit à une dispersion nettement plus isotrope que le schéma carré.

La dispersion détermine le comportement du schéma au voisinage de la troncature. Au contraire, pour les faibles nombres d'onde c'est la partie principale de l'erreur de troncature dont l'effet est prédominant. On a :

$$\widetilde{\Delta} D = \Delta D + \frac{d^2}{16}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) D$$

pour le schéma hexagonal, au lieu de

$$\widetilde{\Delta} D = \Delta D + \frac{d^2}{6}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) D$$

pour un schéma carré analogue sur un réseau de longueur de maille d.

C'est, en fait, la contrainte (14), relative à la conservation exacte de l'enstrophie, qui impose le choix de deux réseaux distincts pour les scalaires et les vecteurs vitesse. Néanmoins, ce choix se traduit par un avantage certain dans le domaine de la dispersion et de l'erreur de troncature : l'opérateur laplacien $\widetilde{\Delta}$ ne fait alors intervenir que les voisins immédiats dans le réseau R'. En particulier, pour ce qui est de la dispersion, la fréquence est une fonction strictement croissante du module du vecteur d'onde dans une direction donnée à l'intérieur de l'hexagone de troncature. La vitesse de groupe ne s'annule qu'aux six sommets de l'hexagone. L'utilisation d'un réseau unique conduirait à un opérateur $\widetilde{\Delta}$ d'étalement double, et à des vitesse de groupe négatives au voisinage de la troncature, ayant un effet parasite sur l'intégration.

e) Tests du schéma numérique

Dans le plan stéréographique, on se donne un réseau de 499 points à maille hexagonale, avec une frontière du premier type, c'est-à-dire la plus proche possible du cercle. L'écoulement à $t = 0$ est choisi de telle sorte que $\underline{V} = 0$ à l'équateur. On lui impose par ailleurs de satisfaire à la relation géostrophique :

$$f\underline{V} = \underline{k} \times \underline{\text{grad}}\ \phi \qquad (t = 0)$$

Cette condition permet l'apparition d'une onde de gravité relativement forte superposée aux mouvements proprement météorologiques, qui sont quasi-non-divergents. On s'est donné les champs suivants :

$$\phi = \phi_0 + \phi_1\left(\frac{1}{3}\cos^3\mu - \frac{1}{5}\cos^5\mu\right) - \phi^2\mu^3\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right)\cos 4\lambda$$

$$u = u_1 \sin^2 2\mu + u_2\,\mu^2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right)\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\cos 4\lambda}{\sin\mu}$$

$$v = \frac{4}{3}u_2\,\mu^3\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{\sin 4\lambda}{\sin 2\mu}$$

qui définissent à l'instant $t = 0$, le géopotentiel et les composantes zonale et méridienne de la vitesse géostrophique correspondante. On a pris :

$$\phi_0 = 10^5\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$$
$$\phi_1 = 16\ a\Omega u_1$$
$$\phi_2 = \frac{2}{3}\ a\Omega u_2$$
$$u_1 = 40\ \text{m s}^{-1}$$
$$u_2 = 50\ \text{m s}^{-1}$$

Dans l'intégration numérique, la dérivation par rapport au temps est remplacée par l'approximation explicite centrée (ou "leapfrog"). D'autre part, on a rajouté un terme dissipatif $\frac{K}{\phi_0}$ grad div (ϕV) à l'équation du mouvement, afin d'amortir les ondes de gravité caractérisées par une divergence importante.

On a choisi de représenter l'évolution du géopotentiel, de la vorticité et de la divergence au cours des trois premiers jours. Ces champs sont représentés sur les figures 8 à 17. La figure 18 montre l'évolution des principales intégrales spatiales en fonction du temps, à savoir l'énergie cinétique totale :

$$C(t) = \iint_S \frac{1}{2}\,\phi\,\underline{V}^2\,dS$$

l'enstrophie totale :

$$Z(t) = \iint_S \frac{1}{2}\,\zeta^2\,dS$$

et l'intégrale du carré de la divergence :

$$D^2(t) = \iint_S (\text{div}(\phi V))^2\,dS.$$

Le coefficient K du terme dissipatif a été choisi assez grand ($5 \times 10^8\ \text{m}^2\ \text{s}^{-1}$), afin d'obtenir un amortissement rapide. La période de 11 heures qui apparaît sur la figure correspond à un mouvement oscillatoire du pôle à l'équateur. C'est une onde de gravité d'amplitude assez forte, qui s'amortit rapidement : l'écoulement peut être considéré comme quasi-non-divergent au bout de deux jours. L'énergie totale, qui décroît de 1 à 0,9981 le premier jour, varie peu par la suite. Elle est égale à 0,998045 au jour 2, à 0,998033 au jour 3. La dissipation est alors très faible. Au cours du troisième jour, l'énergie cinétique

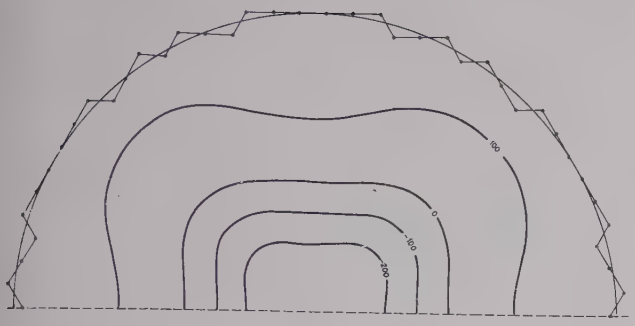

Fig. 8
Champ du géopotentiel (ϕ) à l'instant $t = 0$ (unité : $100\,m^2\,s^{-2}$)

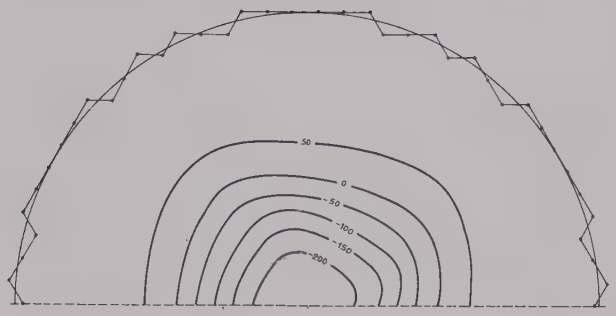

Fig. 9
Champ du géopotentiel au bout d'un jour.

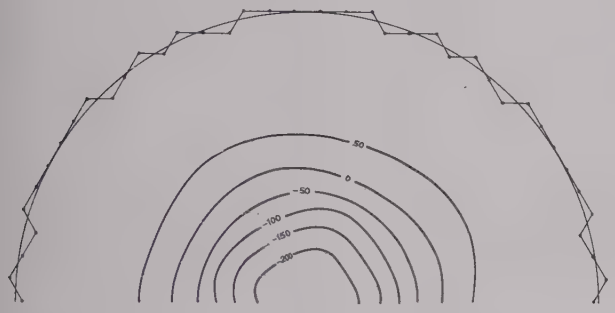

Fig. 10
Champ du géopotentiel au bout de 2 jours.

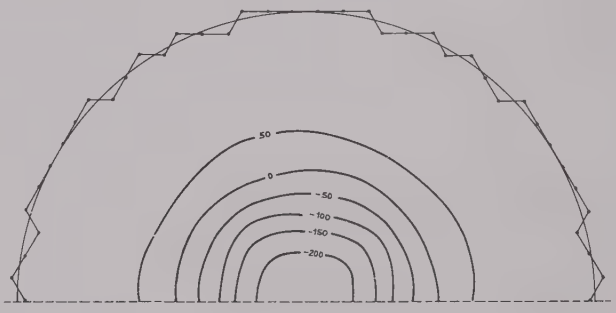

Fig. 11
Champ du géopotentiel au bout de 3 jours.

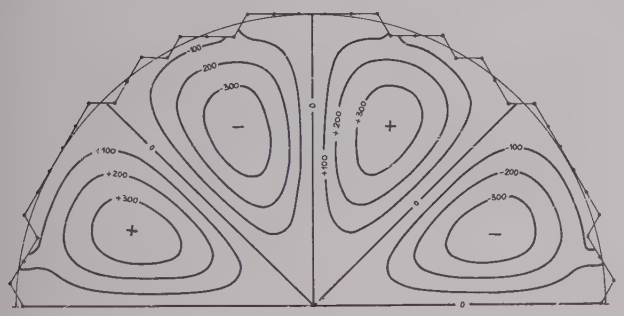

Fig. 12
Divergence de ϕV à l'instant $t = 0$ (unité $10^{-3}\ m^2\,s^{-3}$)

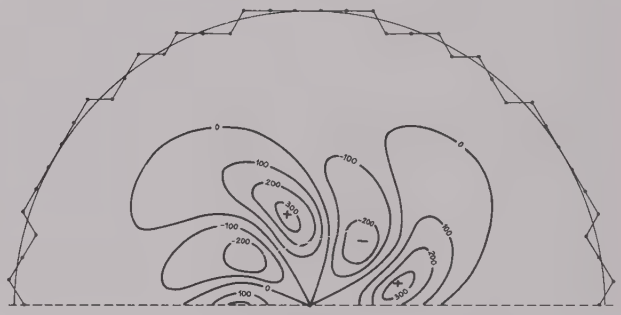

Fig. 13
Divergence de ϕV au bout de 2 jours (unité $10^{-4}\ m^2\,s^{-3}$)

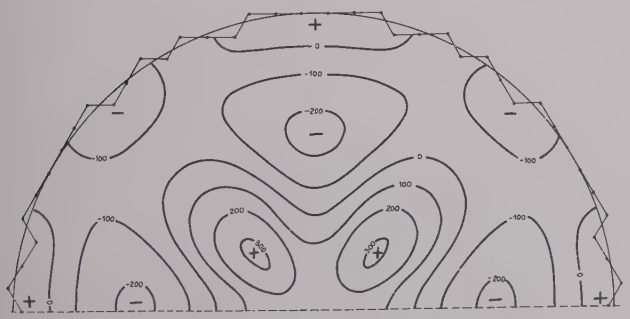

Fig. 14
Vorticité à l'instant $t = 0$ (unité : $10^{-7}\ s^{-1}$)

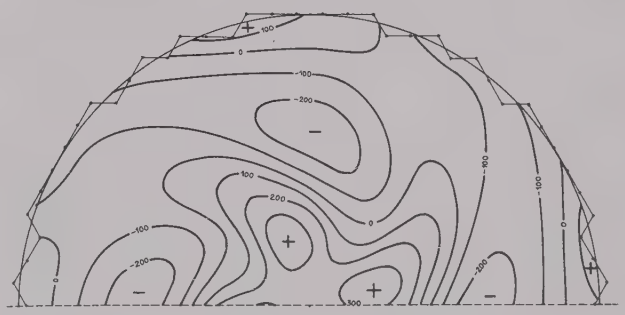

Fig. 15
Vorticité au bout d'un jour.

Fig. 16
Vorticité au bout de 2 jours.

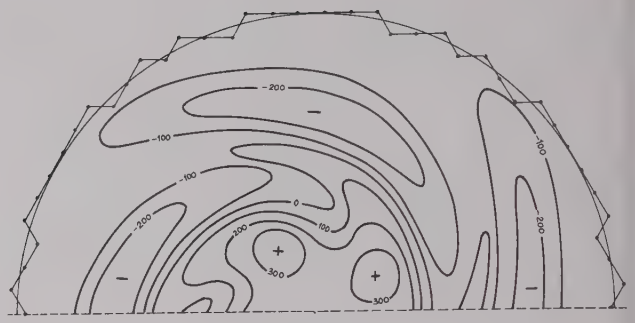

Fig. 17
Vorticité au bout de trois jours.

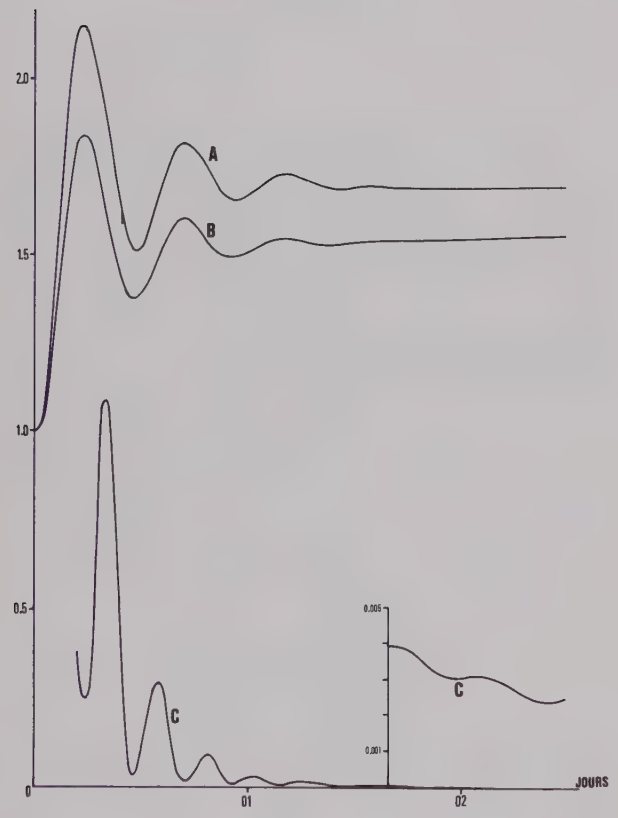

Fig. 18
Evolution de l'énergie cinétique totale (A), de l'enstrophie totale (B) et de l'intégrale du carré de la divergence (C), pour $K = 5 \times 10^8$ m^2 s^{-1}.

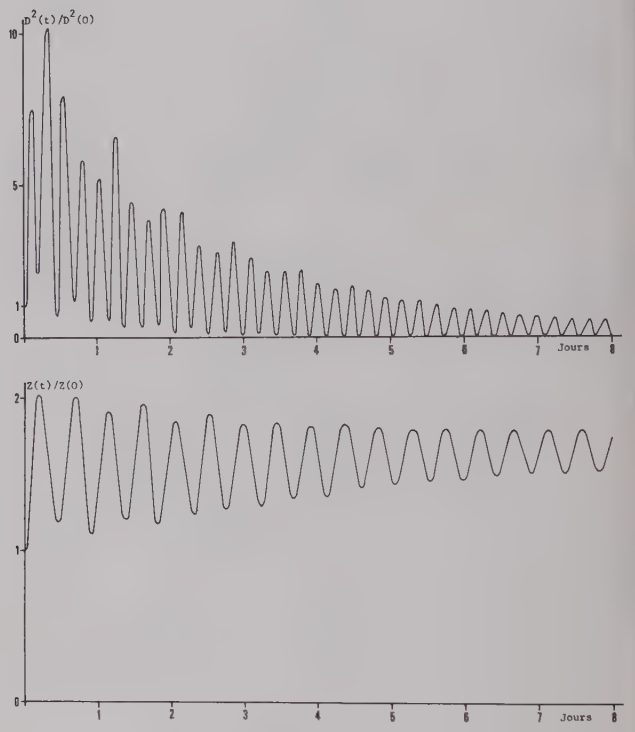

Fig. 19
Evolution de l'intégrale du carré de la divergence $D^2(t)$, et de l'enstrophie totale $Z(t)$, pour $k = 5 \times 10^7$ m^2 s^{-1}.

et l'enstrophie sont quasi-constantes, comme dans le cas d'un écoulement non-divergent. (En fait la divergence n'est pas encore négligeable et l'enstrophie augmente légèrement). L'onde principale tourne d'ouest en est (c'est l'hémisphère sud que l'on a représenté sur les figures), avec une vitesse de phase voisine de la composante zonale du vent. Celle-ci est nulle à l'équateur et passe par un maximum au voisinage des latitudes moyennes, ce qui explique l'étirement progressif des champs. La partie principale de la divergence résiduelle sert à maintenir le géopotentiel en phase avec la vorticité, laquelle est simplement transportée par l'écoulement. Cette partie principale décroit assez lentement : l'onde elle-même est désormais peu amortie par l'opérateur de dissipation (figure 18). La partie sinusoïdale de $D^2(t)$, qui correspond à un reste d'onde de gravité, est faible devant la partie principale. On a ainsi obtenu un ajustement dynamique des champs au prix d'une dissipation d'énergie assez faible. Si l'on

prend $K = 5 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, on est encore loin de l'ajustement au bout de huit jours d'intégration (figure 19), mais il n'y a pas d'accroissement systématique de l'enstrophie.

Les schémas numériques proposés conduisent donc bien à une énergie et une enstrophie stables dans l'intégration numérique, ce qui équivaut à un contrôle de la cascade d'énergie pour la partie rotationnelle de l'écoulement. Ce contrôle résulte de la dynamique des équations elles-même, et s'effectue sans dissipation d'énergie comme dans les équations non tronquées : la dissipation agissant seulement sur la partie divergente.

f) Conclusion

Le schéma que nous avons introduit(*) apparaît en définitive optimal à tous les points de vue : grâce d'une part à l'isotropie du réseau hexagonal, et d'autre part au fait que le schéma à double réseau le plus simple vérifie toutes les propriétés de conservation. Il nous reste maintenant à envisager le problème global, c'est-à-dire la représentation en différences finies d'un écoulement sans frontières sur la totalité de la sphère.

Manuscrit reçu le 5 avril 1972

REFERENCES

[1] Arakawa A., "Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion : two dimensional incompressible flow (part 1)". *J. of computational physics,* **1**, pp. 119-143, 1966.

[2] Masuda Y., "A finite difference scheme by making use of hexagonal meshpoints". *Proc. WMO-IUGG Symp. on Numerical Weather Prediction,* VII, pp. 35-44, Tokio, 1968.

[3] Sadourny R., Arakawa A. et Mintz Y., "Integration of the non-divergent vorticity equation with an icosahedral hexagonal grid for the sphere". *Monthly Weather Review,* Vol. 96, No. 6, June 1968.

[4] Sadourny R., "Numerical integration of the primitive equations on a spherical grid with hexagonal cells". *Proc. WMO-IUGG Symp. on Numerical Weather Prediction,* VII, 45-52, Tokio, 1968.

[5] Sadourny R. et Morel P., "A finite difference approximation of the primitive equations for a hexagonal grid on a plane". *Monthly Weather Review,* Vol. 97, No. 6, June 1969.

[6] Williamson D., "Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid". *Tellus,* Vol. 20, No. 4, pp. 642-653.

[7] Sadourny R., "Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géophysique (Première partie) ". *Ann. Géophys,* **28** (4), 763, 1972.

---

* Pour d'autres types de schémas hexagonaux, voir Sadourny et Morel [5], Sadourny [4], Masuda [2], Williamson [6].

Ann. Géophys., t. 28, fasc. 4, 1972, p. 789 à 802

Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géophysique

Troisième Partie :

Approximations spatiales sur la totalité du domaine sphérique représenté au moyen d'un polyèdre régulier

par Robert SADOURNY

Laboratoire de Météorologie Dynamique du C.N.R.S.

RESUME. – *L'étude des propriétés spectrales des écoulements atmosphériques de grande échelle nous a conduits, dans le cas d'un domaine homéomorphe à un domaine plan, à préconiser une classe générale d'approximations en différences finies possédant certaines propriétés d'invariance* [6] [7]. *Pour représenter un écoulement sur la totalité de la sphère, on est conduit à représenter celle-ci par un ensemble de cartes, en definissant pour chacune un système d'équations scalaires approprié. La jonction entre les différentes cartes donne lieu à un système de conditions aux limites spatiales artificielles, sous forme analytique ou discrétisée. Pour des raisons d'homogénéité spatiale, on choisit de représenter la sphère comme la projection d'un polyèdre régulier circonscrit. Les classes d'approximations conservant la masse et l'énergie totales sont étudiées en détail : l'existence de conditions aux limites entraîne alors l'apparition d'ondes parasites au voisinage de la troncature du spectre ; ces ondes peuvent être éliminées par des opérateurs appropriés. Les schémas conservant l'enstrophie sont beaucoup plus sensibles aux conditions aux limites internes, et conduisent à des erreurs de troncature très élevées.*

SUMMARY. – *A detailed study of the spectral properties of large scale atmospheric motion led us to introduce a general class of finite difference approximations possessing certain invariance properties when the domain of the flow is homeomorphic to some portion of a plane. In order to describe the atmospheric flow over the whole spherical domain, we are now led to split the sphere into a family of maps. We are then using a different system of scalar equations for each map, thus introducing a system of artificial boundary conditions at the map junctions. For reasons of homogeneity in space, we choose to represent the sphere as the central projection of a circumscribed regular polyhedron. The classes of approximations which do conserve mass as well as energy are studied in detail. The existence of internal boundary conditions generate computational waves in the vicinity of the truncation wavenumber. However these waves can be damped out by using appropriate methods. Enstrophy conserving schemes are much more sensitive to the presence of artificial boundary conditions, and lead to higher truncation errors.*

On considère désormais un écoulement barotrope à deux dimensions sur le domaine sphérique tout entier. Un seul système de coordonnées est ici clairement insuffisant, dans la mesure où la sphère n'est pas homéomorphe au plan. On sera conduit par conséquent à considérer une partition de la sphère en deux ou plusieurs régions, et à envisager dans chacune de ces régions un système d'équations scalaires approprié. Par exemple, Phillips [4] suggère l'utilisation d'un recouvrement de la sphère constitué par deux calottes sphériques et par une zone équatoriale. Les calottes sphériques sont représentées dans une projection stéréographique, la zone équatoriale par des coordonnées sphériques (longitude

et latitude). L'inconvénient majeur de la méthode est que les trois réseaux utilisés ne concordent pas dans les régions communes aux trois domaines. Des interpolations sont alors nécessaires pour passer d'un domaine à l'autre et définir les conditions aux limites. Ces interpolations rendent pratiquement impossible la conservation exacte des invariants intégraux du problème. La méthode la plus couramment utilisée par les météorologistes est analogue, à ceci près qu'ils étendent la zone équatoriale jusqu'au voisinage immédiat des deux pôles, ceux-ci étant traités séparément : les coordonnées utilisées (sauf aux pôles) sont encore les coordonnées sphériques. Néanmoins, le fait que les pôles sont des points singuliers pour le système des coordonnées sphériques peut conduire à des difficultés dans la définition des conditions aux limites.

Quand on utilise des coordonnées sphériques sur la totalité de la sphère privée de ses pôles, il est naturel de choisir un réseau uniforme dans le plan (μ, λ) où μ est la latitude, λ la longitude. Ce type de réseau est néanmoins très inefficace du point de vue du calcul, à cause de sa résolution exagérée dans les hautes latitudes. C'est la raison pour laquelle certains auteurs, tels que Kurihara [1] [2], ont suggéré l'utilisation de réseaux quasi-uniformes sur la sphère. Dans les réseaux proposés par Kurihara, le nombre de points sur un parallèle décroit de l'équateur vers le pôle. Plus récemment, Sadourny, Arakawa et Mintz [5], et Williamson [8] [9], ont suggéré l'utilisation d'un réseau sphérique quasi-uniforme dérivé de l'icosaèdre régulier. Dans tous ces types de réseaux, le nombre de points entourant le pôle ne dépend pas de la résolution, la distance en longitude entre ces points est fixe ($\Delta\lambda = \pi/2$ dans le cas du réseau de Kurihara, $\Delta\lambda = 2\pi/5$ dans le cas du réseau icosaédrique).

a) Etude de la condition aux limites au pôle en coordonnées sphériques

Nous allons montrer que l'utilisation de coordonnées sphériques n'est pas compatible avec la donnée des réseaux quasi-uniforme sur la sphère.

Considérons par exemple la composante zonale de l'équation du mouvement en coordonnées sphériques. Elle s'écrit, à l'instant t_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda, \mu, t_0) + A(\lambda, \mu, t_0) = 0$$

avec la notation :

$$A(\lambda, \mu, t_0) = \frac{1}{a}\left(\frac{u}{\cos\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} - v \sin\mu\right) + v\frac{\partial u}{\partial \mu} + \frac{1}{\cos\mu}\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}\right) - vf$$

u et v étant les composantes zonale et méridienne du vecteur vitesse de l'écoulement. La condition aux limites pour le champ u au voisinage du pôle peut s'écrire :

$$\lim_{\mu \to \frac{\pi}{2}} u(\lambda, \mu, t_0) = u_0(t_0)\cos\lambda + v_0(t_0)\sin\lambda$$

où $u_0(t_0)$ et $v_0(t_0)$ sont les composantes du vecteur vitesse au pôle dans un certain repère cartésien. On en déduit que :

$$\lim_{\mu \to \frac{\pi}{2}} \frac{\partial u}{\partial t}(\lambda, \mu, t_0) = \frac{\partial u_0}{\partial t}(t_0)\cos\lambda + \frac{\partial v_0}{\partial t}(t_0)\sin\lambda$$

On pose :

$$B(\lambda, t_0) = \frac{\partial u_0}{\partial t}(t_0)\cos\lambda + \frac{\partial v_0}{\partial t}(t_0)\sin\lambda$$

$A(\lambda, \mu, t_0)$ a donc une limite finie au voisinage du pôle :

$$\lim_{\mu \to \frac{\pi}{2}} A(\lambda, \mu, t_0) = B(\lambda, t_0)$$

On considère maintenant une suite de réseaux G_n, $n = 1, 2, \ldots$ dans le plan (λ, μ), correspondant à des réseaux quasi-uniformes S_n sur la sphère. Les réseaux G_n ne sont donc pas des réseaux réguliers. On suppose que l'on dispose, pour définir ces réseaux, d'une méthode de construction bien définie. Les réseaux G_n ne diffèrent alors les uns des autres que par la résolution. Celle-ci est mesurée par un paramètre d_n. Par exemple, on suppose que la distance entre deux points voisins quelconques dans S_n est comprise entre αd_n et βd_n, où α et β ne dépendent que de la méthode de construction On définit une suite d'approximations en différences finies, sur les réseaux G_n, de $A(\lambda, \mu, t)$, que l'on notera :

$$\tilde{A}(\lambda_n, \mu_n, t_0, d_n)$$

le point (λ_n, μ_n) appartenant au réseau G_n. On suppose maintenant que la suite d_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. La suite d'approximations sera consistante si, quelque soit la suite de points (λ_n, μ_n) de G_n, la condition

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda_n, \mu_n) = (\lambda, \mu)$$

entraîne :

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{A}(\lambda_n, \mu_n, t_0, d_n) = A(\lambda, \mu, t_0)$$

Une condition nécessaire à la consistance des opérateurs $\tilde{A}$ est donc la suivante :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda_n \to \lambda \\ \mu_n \to \frac{\pi}{2}}} \tilde{A}(\lambda_n, \mu_n, t_0, d_n) = B(\lambda, t_0)$$

Définissons une approximation $\frac{\delta u}{\delta \lambda}$ de $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$, et prenons :

$$\widetilde{A}(\lambda_n, \mu_n, t, d_n) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{u_n}{\cos \mu_n}\left(\frac{\delta u_n}{\delta \lambda} - v_n \sin \mu_n\right) + \right.$$

$$\left. + v_n \frac{\partial u_n}{\partial \mu} + \frac{1}{\cos \mu_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial \lambda}\right) - f_n v_n$$

avec :

$$u_n = u(\lambda_n, \mu_n, t_0)$$
$$v_n = v(\lambda_n, \mu_n, t_0)$$
$$\phi_n = \phi(\lambda_n, \mu_n, t_0)$$
$$f_n = f(\mu_n)$$

La suite de points (λ_n, μ_n) dans (1) peut être choisie comme une suite de voisins immédiats du pôle : or nous avons vu que la distance en longitude entre deux de ces points reste constante et égale à $\Delta\lambda$. Ceci entraine :

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{\delta u_n}{\delta \lambda} - \frac{\partial u_n}{\partial \lambda}\right) \neq 0$$

On peut dès lors être sûr que la condition (1) n'est pas satisfaite. Comme $A(\lambda_n, \mu_n, t_0)$ a une limite finie quand $n \to \infty$ on a nécessairement :

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial \lambda} - v_n \sin \mu_n\right) = 0$$

Il en résulte :

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{\delta u_n}{\delta \lambda} - v_n \sin \mu_n\right) \neq 0$$

qui donne finalement :

$$\widetilde{A}(\lambda_n, \mu_n, t_0, d_n) \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

L'emploi de coordonnées sphériques jusqu'au pôle est donc à exclure sur des réseaux de ce type. Il est néanmoins souhaitable d'utiliser des réseaux sphériques quasi-uniformes, qui, en plus du gain en temps de calcul, conduisent à des calculs plus homogènes, parce que la troncature des champs s'effectue au voisinage d'une longueur d'onde unique en tous les points du réseau. Si l'on fait ce choix, on est contraint d'abandonner la représentation en coordonnées sphériques. Nous proposerons la méthode suivante : on partira d'un polyèdre convexe (de préférence un polyèdre régulier circonscrit à la sphère pour l'uniformité du traitement). On projettera chaque face sur la sphère à partir de son centre, obtenant ainsi une décomposition du domaine sphérique en un certain nombre de domaines contigus. Les équations scalaires du mouvement seront exprimées dans des coordonnées curvilignes liées à ces projections, et intégrées séparément dans les différents domaines. La donnée d'un réseau régulier sur chaque face du polyèdre permet de définir un réseau sphérique à peu près uniforme. Les conditions aux limites artificielles introduites par la méthode sont relativements simples ; on verra qu'elles n'ont pas d'effet sur les diverses propriétés de conservation.

b) Approximations en différences finies basées sur une décomposition polyédrique de la sphère

On se donne un polyèdre P convexe ; on désigne ses différentes faces par P_n, $n = 1$ à p. On suppose que le centre 0 de la sphère est intérieur à P, et on appelle $\P$ l'une des deux projections de centre 0 qui appliquent S sur P. Si M est un point de S et m un point de P,

$$m = \P(M)$$

On appelle S_n le polygone sphérique image réciproque de P_n par l'application $\P$, dont la restriction à S_n sera notée $\P_n$. La donnée d'un repère cartésien dans P_n permet de définir dans S_n un système d'équations scalaires représentant l'écoulement, dont la formulation a été donnée dans la partie II. On obtient ainsi pour chacune des p faces un système d'équations analogue au système obtenu dans la deuxième partie :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \epsilon_{ij} u^j \left(gf + \epsilon^{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x^k}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\phi + \frac{1}{2} u_k u^k\right) = 0 \quad (2)$$

$$g \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(g \phi u^i) = 0$$

où u_i et u^i sont les composantes covariantes et contravariantes du vecteur vitesse, ϕ est le géopotentiel, ϵ^{ij} est défini par :

$$\begin{pmatrix} \epsilon^{11} & \epsilon^{12} \\ \epsilon^{21} & \epsilon^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

g est le facteur d'aire :

$$g = |\det(g_{ij})|^{1/2}$$

où g_{ij} définissent la métrique locale :

$$u_i = g_{ij} u^j$$

Dans toutes ces formules, nous avons omis, pour simplifier, l'indice n de la projection. On appellera ϕ_n l'intégrale spatiale du géopotentiel (ou "masse") sur S_n, E_n l'intégrale de l'énergie totale sur S_n :

$$\phi_n = \int\int_{P_n} g \phi \, dx^1 \, dx^2 \quad (3)$$

$$E_n = \int\int_{P_n} g\phi \left(\frac{1}{2}\,\phi + \frac{1}{2}\,u_k\,u^k\right) dx^1\,dx^2 . \quad (3)$$

On notera P_{nm} l'arête commune aux faces P_n et P_m, qui peut être l'ensemble vide si ces faces ne sont pas contiguës. On appellera S_{nm} l'image réciproque de P_{nm} par l'application ¶. Quand on utilisera les composantes covariantes ou contravariantes du vecteur vitesse, l'indice n entre parenthèses indiquera l'application $¶_n$ utilisée dans leur définition. On peut alors écrire :

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + \sum_{m\neq n} \int_{P_{nm}} g\phi \begin{vmatrix} u^1_{(n)} & u^2_{(n)} \\ dc^1_{(n)} & dc^2_{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} + \sum_{m\neq n} \int_{P_{nm}} \left(\phi + \frac{1}{2}\,u_{k(n)}\,u^k_{(n)}\right) g\phi \begin{vmatrix} u^1_{(n)} & u^2_{(n)} \\ dc^1_{(n)} & dc^2_{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

On obtiendra les conditions aux limites sur une arête P_{nm} en exprimant l'identité des paramètres physique ϕ et $\underline{V}$ à droite et à gauche. Ces conditions entraînent que l'on a en tout point de P_{nm} :

$$\begin{vmatrix} u^1_{(n)} & u^2_{(n)} \\ dc^1_{(n)} & dc^2_{(n)} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u^1_{(m)} & u^2_{(m)} \\ dc^1_{(m)} & dc^2_{(m)} \end{vmatrix} \quad (5)$$

relation qui exprime l'identité du flux à droite et à gauche, quelles que soient les coordonnées utilisées dans les deux faces. On pourra exprimer de même l'identité de la circulation, qui donne :

$$u_{i(n)}\,dc^i_{(n)} = - u_{i(m)}\,dc^i_{(m)} \quad (6)$$

Ces deux relations déterminent entièrement les conditions aux limites pour les composantes du vecteur vitesse. La condition aux limites pour ϕ est simplement l'identité du champ à droite et à gauche. Si l'on effectue la somme des relations (6) pour $n = 1$ à p, l'égalité (5) entraîne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sum_{n=1}^{P} \frac{\partial \phi_n}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{n=1}^{P} \frac{\partial E_n}{\partial t} = 0$$

On se propose de construire des approximations numériques qui conservent des formes discrétisées de l'intégrale spatiale du géopotentiel et de l'intégrale spatiale de l'énergie totale. Pour assurer de telles propriétés, la définition de deux réseaux distincts pour les quantités scalaires et vectorielles n'est pas nécessaire. On définira donc dans chaque face P_n un réseau régulier $\widetilde{P}_n$. On appellera $\widetilde{P}_{nm}$ l'intersection de $\widetilde{P}_n$ et de P_{nm}. Pour éviter l'usage d'interpolations dans l'expression des conditions aux limites, on supposera

$$\widetilde{P}_{nm} = \widetilde{P}_{mn}$$

A l'ensemble de ces réseaux partiels correspondra un réseau $\widetilde{S}$ sur la sphère, réunion des réseaux partiels S_n définis par :

$$\widetilde{P}_n = ¶\,(\widetilde{S}_n)$$

Aux $\widetilde{P}_{nm}$ correspondront des sous-réseaux $\widetilde{S}_{nm}$, disposés sur des grands cercles :

$$\widetilde{P}_{nm} = ¶\,(\widetilde{S}_{nm})$$

dont la réunion constitue l'ensemble des points frontière. On appellera $N(n)$ le nombre de points du réseau $\widetilde{P}_n$, $N(n, m)$ le nombre de points du réseau-frontière $\widetilde{P}_{nm}$.

Reprenant le formalisme introduit dans la partie II, on définira dans l'espace $\boldsymbol{R}^{N(n)}$ un produit scalaire :

$$<\phi, \psi>_n = \sum_{\widetilde{P}_n} \phi\psi\, s_n$$

s_n étant l'élément d'aire associé à un point. Un seul produit scalaire suffira ici. Nous définirons de plus un produit scalaire dans $\boldsymbol{R}^{N(n,m)}$:

$$<\phi, \psi>_{nm} = \sum_{\widetilde{P}_{nm}} \phi\psi\, c$$

où c est l'élément de longueur associé à un point de $\widetilde{P}_{nm}$. On appellera ν^{nm}_i les composantes covariantes du vecteur unitaire normal à P_{nm}, dans la face P_n, dirigé vers l'extérieur de la face. La relation (5) équivaut à :

$$\nu^{nm}_i\,u^i_{(n)} = - \nu^{mn}_i\,u^i_{(m)} \quad (7)$$

On définit dans $\widetilde{P}_n$ des approximations en différences finies δ^n_i des opérateurs $\frac{\partial}{\partial x^i}$, avec la condition :

$$\delta^n_i(1) = 0$$

L'analogue, sous forme discrétisée, des relations (4) peut s'écrire :

$$<\phi', \delta^n_i(g\phi u^i)>_n + <\delta^n_i\phi', g\phi u^i>_n =$$

$$= \sum_{m\neq n} <\phi', \gamma^{nm}(\nu^{nm}_i\, g\phi u^i)>_{nm} \quad (8)$$

où γ^{nm} est un opérateur linéaire (d'ailleurs symétrique) dans $R^{N(n,m)}$, et $\phi' = 1$ ou $\phi' = \phi + \frac{1}{2}u_k u^k$. d'après (7), les flux discrétisés du second membre s'annuleront exactement dans une sommation sur n si :

$$\gamma^{nm} = \gamma^{mn}$$

On peut faire sortir ν^{nm}_i du produit scalaire dans

la relation (8), qui équivaut alors à dire que δ_i^n doit se décomposer sous la forme :

$$\delta_i^n = \alpha_i^n + \sum_{m \neq n} \nu_i^{nm} \beta^{nm} \tag{9}$$

où α_i^n est un opérateur arbitraire antisymétrique dans $R^{N(n)}$ et β^{nm} un opérateur arbitraire dans $R^{N(n,m)}$, tel que

$$\beta^{nm} = \beta^{mn} \tag{10}$$

La donnée d'un opérateur δ_i^n conduit à une définition des dérivées temporelles dans chaque réseau P_n, que nous noterons

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_n \quad , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_n$$

Pour un point M strictement intérieur à une face S_n, il n'y a pas d'ambiguïté, la forme discrétisée est unique ; on posera :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_n$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_n$$

Par contre, on obtient deux ou plusieurs formes distinctes quand M appartient à un réseau-frontière $\tilde{S}_{nm}$. Il s'agit alors de définir une forme unique sans perturber les propriétés de conservation. On posera :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\sum_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_n s_n}{\sum_n s_n}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\sum_n \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_n s_n}{\sum_n s_n} \tag{11}$$

la sommation s'effectuant sur les indices des différentes faces auxquelles appartient le point. Ces définitions sont compatibles avec la définition suivante de l'intégrale sur tout le domaine :

$$< \phi , \psi > = \sum_{n=1}^{P} < \phi , \psi >_n$$

L'énergie et la masse totales sont alors conservées exactement si les relations (9) et (10) sont satisfaites.

Dans la pratique, on se donnera a priori des formes discrétisées du flux sur les frontières, c'est-à-dire, on définira d'abord sur chaque frontière $\tilde{P}_{nm}$ un opérateur β^{nm}. L'opérateur α_i^n s'en déduira de proche en proche en utilisant les propriétés d'antisymétrie et de consistance, ou des formes discrétisées du théorème de Stokes sur une ou plusieurs mailles du réseau. Si les parties β^{nm} représentent les flux sortants, la partie α^{nm} représente des interactions antisymétriques entre les points du réseau, c'est-à-dire des flux internes. Toute forme "flux" de l'opérateur satisfera donc aux propriétés de conservation de la masse et de l'énergie, pourvu que les discrétisations β^{nm} coïncident sur les frontières.

c) Opérateurs homogènes et isotropes sur des réseaux polyédriques réguliers

Dans la pratique, on s'efforce de traiter le problème de la façon la plus homogène possible sur le domaine sphérique ; on est ainsi conduit à utiliser les polyèdres réguliers. Parmi les cinq polyèdres réguliers convexes, seul le dodécaèdre, dont les faces sont des pentagones, ne se prête pas à la définition de réseaux réguliers contigus. Le cube donnera lieu à des réseaux de type carré ; le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre, à des réseaux de type hexagonal. Pour la même raison, on utilisera des opérateurs α_i^n homogènes, au sens que nous allons préciser. On considère un réseau infini $\tilde{P}$ de type carré ou hexagonal suivant le cas, et les translations $\tilde{\tau}$ appliquant $\tilde{P}$ sur lui-même. Pour les quantités $\phi(m)$ définies aux points du réseau, on définit les opérateurs de substitution τ correspondant aux translations $\tilde{\tau}$:

$$\tau \phi(m) = \phi(\tilde{\tau} m)$$

On dira qu'un opérateur α_i sur l'espace des $\phi(m)$ est homogène si

$$\alpha_i = \tau \alpha_i \tau^{-1}$$

quelle que soit la translation $\tilde{\tau}$; en d'autres termes, un opérateur est homogène s'il est invariant dans les translations propres du réseau. Nous considérerons uniquement des opérateurs α_i^n homogènes, restrictions à $\tilde{P}_n$ d'opérateurs α_i homogènes.

Que α_i soit un opérateur antisymétrique se traduit par le fait que le coefficient de $\phi(m)$ dans $\alpha_i \phi(m')$ est opposé au coefficient de $\phi(m')$ dans $\alpha_i \phi(m)$. Si l'on se donne la translation $\tilde{\tau}$ telle que

$$m' = \tilde{\tau}(m)$$

et le point :

$$m'' = -\tilde{\tau}(m)$$

l'homogénéité de l'opérateur α_i signifie que le coefficient de $\phi(m')$ dans $\alpha_i \phi(m)$ est égal au coefficient de $\phi(m)$ dans $\alpha_i \phi(m'')$. On en déduit que si α_i est un opérateur homogène antisymétrique, les coefficients de $\phi(m')$ et $\phi(m'')$ dans $\alpha_i \phi(m)$ sont opposés. On dit alors que l'opérateur est centré. On peut donner des opérateurs centrés une défini-

tion globale analogue à celle des opérateurs homogènes. On considère les symétries $\tilde{\sigma}$ par rapport à un point du réseau $\tilde{P}$, et les opérateurs de substition σ tels que

$$\sigma\phi(m) = \phi(\tilde{\sigma}m)$$

On dira que l'opérateur α_i est centré si :

$$\alpha_i = -\sigma\alpha_i\sigma^{-1}$$

et on vérifie immédiatement que cette définition est identique à la précédente.

Dans la pratique, l'antisymétrie de α_i^n sera donc assurée par le choix d'un opérateur α_i homogène centré. Ceci nous amène à l'isotropie, car le fait d'être centré est une propriété d'isotropie particulière.

Il est clair que l'isotropie géométrique du problème est à conserver dans la mesure du possible au niveau des approximations, afin d'éviter de traiter certains écoulements de façon privilégiée. A cet effet, on appellera y^j les directions principales du réseau $\tilde{P}_n$, directions définies à partir des couples de points voisins. Elles sont au nombre de deux dans le cas du cube, au nombre de trois dans le cas des autres polyèdres. Dans tous les cas les frontières de $\tilde{P}_n$ sont parallèles aux directions principales.

On se donne d'abord un opérateur de dérivation analogue à α_i, mais suivant une direction principale y^j. On note cet opérateur ϵ_j. On suppose cet opérateur homogène sur le réseau étendu à l'infini. Au lieu de le supposer seulement centré (au sens défini plus haut) on suppose réalisées les deux conditions suivantes :

(i) On appelle σ_j' l'opérateur de substitution correspondant à une symétrie quelconque d'axe perpendiculaire à y^j, appliquant $\tilde{P}$ sur lui-même. On astreint ϵ_j à vérifier la relation :

$$\epsilon_j = -\sigma_j'\,\epsilon_j\,\sigma_j'^{-1}$$

(ii) On appelle σ_j'' l'opérateur de substitution correspondant à une symétrie quelconque d'axe parallèle à y_j, appliquant $\tilde{P}$ sur lui-même. On astreint ϵ_j à vérifier la deuxième relation :

$$\epsilon_j = \sigma_j''\,\epsilon_j\,\sigma_j''^{-1}$$

Un opérateur ϵ_j vérifiant (i) et (ii) sera dit doublement centré. Il va de soi su'il est alors centré, car tout opérateur de substitution correspondant à une symétrie par rapport à un point peut s'écrire

$$\sigma = \sigma_j'\,\sigma_j''$$

relation qui, jointe à (i) et (ii), entraîne bien

$$\epsilon_j = -\sigma\epsilon_j\,\sigma^{-1}$$

On considère la restriction ϵ_j^n de ϵ_j à $\tilde{P}_n$, en se plaçant dans le cas de réseaux hexagonaux (le cas du cube serait analogue). Les arêtes de la face sont $\tilde{P}_{n,j}$ (parallèle à la direction de dérivation y^j), $\tilde{P}_{n,j+1}$ et $\tilde{P}_{n,j-1}$. Par la condition de consistance, on "ferme" l'opérateur sur la frontière $\tilde{P}_{n,j+1}$, c'est-à-dire on détermine un opérateur $\mu^{n,j+1}$ analogue à l'opérateur β^{nm} de la relation (9), et on agit de même sur les autres arêtes. On obtient ainsi un opérateur de dérivation suivant y^j :

$$\lambda_j^n = \epsilon_j^n + \sum_{k=-1}^{+1} \nu_j^{n,j+k}\,\mu^{n,j+k}$$

On a les relations :

$$\nu_j^{n,j+1} = -\nu_j^{n,j-1}$$

$$\nu_j^{n,j} = 0$$

La propriété (i) appliquée à la symétrie unique échangeant $\tilde{P}_{n,j+1}$ et $\tilde{P}_{n,j-1}$, entraîne alors :

$$\mu^{n,j+1} = \mu^{n,j-1} = \mu$$

et l'annulation de $\nu_j^{n,j}$ permet de choisir également

$$\mu^{n,j} = \mu$$

On aboutit alors à une discrétisation unique pour toutes les frontières ;

$$\lambda_j^n = \epsilon_j^n + \sum_{k=-1}^{+1} \nu_j^{n,j+k}\,\mu$$

On va définir maintenant de façon isotrope les dérivations le long des autres directions principales. On considère les opérateurs de substitution ρ_{jl} correspondant aux trois rotations qui appliquent le réseau triangulaire $\tilde{P}_n$ sur lui-même, et on définit :

$$\begin{aligned} \lambda_l^n &= \rho_{jl}^n \quad \lambda_j^n\,\rho_{jl}^{-1} \\ \epsilon_l^n &= \rho_{jl} \quad \epsilon_j^n\,\rho_{jl}^{-1} \end{aligned} \qquad (l = 1,3) \qquad (12)$$

On obtient alors trois opérateurs ayant la même forme :

$$\lambda^n{}_1 = \epsilon_l^n + \sum_{k=-1}^{+1} \nu_l^{n,1+k}\mu \quad (l = 1,3)$$

car les frontières s'échangent simplement dans les substitutions en même temps que les directions de dérivation.

Enfin, on se donne les deux directions x^i, on appelle θ_i^j l'angle de la direction x^i vers la direction x^j, et l'on pose :

$$\begin{aligned} \delta_i^n &= \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} \cos\theta_i^j\,\lambda_j^n \\ \alpha_i^n &= \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} \cos\theta_i^j\,\epsilon_j^n \end{aligned} \qquad (13)$$

Les opérateurs vérifient alors :

$$\delta_i^n = \alpha_i^n + \sum_{k=1}^{3} \nu_i^{nk}$$

car

$$\nu_i^{nk} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{3} \cos \theta_i^j \, \nu_j^{nk}$$

Les propriétés (9) et (10) sont automatiquement vérifiées, α_i^n étant manifestement antisymétrique et μ étant une discrétisation unique pour toutes les frontières. Le cas du cube ne diffère que par le nombre de termes dans les sommations et l'absence du coefficient 2/3. La consistance est implicite sur les frontières d'après la définition de μ. On a vu par ailleurs que μ disparaît dans la formulation finale. La donnée d'un seul ϵ_j suffit ainsi à l'écriture du schéma.

Nous avons ainsi déterminé une classe d'approximations en différences finies homogènes et isotropes vérifiant la conservation de l'énergie et de la masse, et vérifiant implicitement la consistance sur les frontières. Ces approximations dérivent, grâce aux formules (44) et (45) d'un opérateur unique ϵ_j, supposé seulement homogène et doublement centré, et défini comme opérateur de dérivation le long d'une direction principale.

Nous n'avons pas considéré ici de réseaux doubles, ni, par voie de conséquence, la contrainte sur l'enstrophie. Ceci est dû à l'existence de frontières internes au domaine de l'écoulement. En effet, la formulation donnée dans la deuxième partie fait intervenir la composition d'un opérateur de moyenne par un opérateur de dérivation. L'opérateur de moyenne régresse nécessairement au premier ordre sur les frontières, où il n'est plus exactement centré : comme on peut le voir d'après l'allure des réseaux sur les figures 2 et 3. Il en résulte que la quantité $\frac{1}{2} V^2$ est définie au premier ordre près seulement sur la plupart des points frontière, à l'exception des sommets et des milieux d'arêtes, pour lesquels se retrouve la symétrie géométrique. On perd alors la consistance pour le terme $\underline{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} V^2\right)$. Dans les formulations de la deuxième partie, la consistance était récupérée par un traitement approprié de la frontière, grâce à l'existence de conditions limites particulières. Ce n'est plus le cas ici : c'est pourquoi on ne s'est pas posé le problème de conserver exactement l'enstrophie. Celui-ci peut être résolu, dans le cadre d'une approche radicalement différente, si l'on accepte de se limiter à des schémas du premier ordre. Il est traité dans l'appendice.

d) L'approximation centrée simple

L'approximation la plus simple de type indiqué au paragraphe précédent est obtenue quand on prend pour opérateur ϵ_j l'opérateur centré à trois points

$$\epsilon_j \phi(m_i) = \frac{s}{d} \left(\phi(m_{i+1}) - \phi(m_{i+1})\right) \qquad (14)$$

où les points m_{i-1}, m_i, m_{i+1} se suivent le long de la direction principale y^j. Cet opérateur conduit manifestement à des schémas du second ordre en tous les points strictement intérieurs aux réseaux $\widetilde{P}_n$. La "fermeture" de ϵ_j sur les frontières $\widetilde{P}_{nm}$ conduit à un opérateur du premier ordre sur les frontières ; l'opération de moyenne (11) ne restitue pas le second ordre, car les erreurs de troncature à droite et à gauche de $\widetilde{P}_{nm}$ dépendent des applications $\P_n$ et $\P_m$, et leurs parties principales n'ont pas de raison de s'annuler exactement. La définition (14) conduit donc à un schéma du premier ordre sur les frontières du second ordre partout ailleurs. Dans la mesure où il y a relativement peu de points sur les frontières, le schéma peut être considéré comme globalement du second ordre. En effet, si N représente le nombre de points du réseau $\widetilde{S}$, et $\bar{N}$ le nombre de points frontière, on peut écrire :

$$\frac{\bar{N}}{N} = 0(d)$$

et l'ordre de grandeur moyen de l'erreur de troncature est le suivant :

$$e = \frac{1}{N} \left((N - \bar{N}) \, 0(d^2) + \bar{N} \, 0(d)\right) = 0(d^2)$$

Néanmoins, cette estimation globale est insuffisante en ce qu'elle néglige l'effet spécifique dû à la répartition spatiale de l'erreur. En fait, les erreurs du premier ordre sur les frontières apparaîtront dans le calcul comme des perturbations isolées de l'écoulement le long de certains alignements de points. Ces perturbations seront agéostrophiques et engendreront des ondes de gravité parasites dont la longueur d'onde sera égale à $2d$ dans le plan P_n. (Par exemple : une perturbation isolée de ϕ crée un gradient au point suivant, dans la direction normale à l'arête et engendre ainsi une vitesse parasite qui va créer à son tour, par le jeu de l'équation de continuité, une perturbation de ϕ au point distant de $2d$; et ainsi de suite). La création de ces ondes se fera aux dépens de l'énergie de plus grande échelle, et l'approximation ne sera utilisable que si cette perte d'énergie est faible devant les échanges énergétiques réels, de nature physique ou dynamique. On peut admettre que ces ondes parasites n'agissent pas en retour sur les mouvements de grande échelle,

car les ondes de longueur $2d$ sont "ignorées" par l'opérateur centré (14). Il n'y a pas d'inconvénient majeur à les filtrer, même si l'on filtre en même temps des phénomènes de même longueur d'onde présentant un intérêt physique : les propriétés de dispersion du modèle sont de toute façon médiocres au voisinage de la troncature, la dynamique des ondes de longueur $2d$ y est très loin de la réalité.

On peut utiliser le procédé de filtrage le plus simple, qui consiste à rajouter au second membre de l'équation du mouvement un terme $\nu \Delta \underline{V}$ où ν a la dimension d'un coefficient de viscosité cinématique. Dans le cas bi-dimensionnel qui nous intéresse ici, le laplacien peut s'écrire :

$$\Delta \underline{V} = \underline{\text{grad}}\ \text{div}\ \underline{V} + \underline{k} \times \underline{\text{grad}}\ \text{rot}\ \underline{V}$$

Il se calcule ainsi à l'aide des opérateurs discrétisés déjà définis. Ce terme entraîne en fait un amortissement non négligeable des mouvements de grande échelle, sans réalité physique, car il dépasse largement l'amortissement dû à une cascade d'énergie éventuelle. On le remplacera avantageusement par un laplacien itéré :

$$\nu_\alpha \Delta^\alpha \underline{V}$$

qui donne lieu à un amortissement beaucoup plus sélectif, proprotionnel à la puissance $(2\alpha)^{\text{ème}}$ du nombre d'onde. Si α est assez grand, l'amortissement devient négligeable sauf au voisinage de la longueur d'onde $2d$. Le coefficient ν_α est déterminé empiriquement de façon à contrôler l'onde parasite.

Un procédé plus efficace et plus sélectif consiste à tenir compte du caractère ageostrophique de la perturbation. L'onde parasite étant une onde de gravité, sera efficacement amortie par un terme analogue à celui que nous avons introduit dans la première partie pour simuler le processus d'ajustement géostrophique. On rajoutera au second membre de l'équation du mouvement le terme :

$$K\ \underline{\text{grad}}\ \text{div}\ \underline{V}$$

c'est-à-dire un terme équivalant à la partie divergente d'un opérateur de diffusion. La partie rotationnelle de l'écoulement n'est pas modifiée par ce procédé. Comme l'écoulement de grande échelle est essentiellement non-divergent, l'amortissement n'a lieu qu'au voisinage de la troncature, et l'itération du processus n'est pas nécessaire comme dans le cas précédent. Le coefficient K est ici encore déterminé de façon empirique.

Le schéma (14) est utilisable sur les quatre polyèdres. Le choix du polyèdre s'effectuera suivant deux critères : l'efficacité numérique et la précision du calcul, qui dépend essentiellement de l'amplitude de l'onde parasite. On peut aussi faire intervenir l'homogénéité des réseaux : on a intérêt à utiliser les réseaux les plus homogènes possibles, dans lesquels les points sont répartis de la façon la plus uniforme sur la sphère. La densité des points du réseau S_n est inversement proportionnelle au coefficient g. La valeur maximum de g étant égale à 1 (au centre des faces du polyèdre), l'homogenéité sera mesurée par sa valeur minimum :

	Isocaèdre	Octaèdre	Cube	Tétraèdre
min	0.517	0.192	0.192	0.037

Les réseaux icosaédriques sont donc les réseaux dont la répartition est la plus homogène. L'octaèdre et le cube ont en fait des propriétés analogues, le choix du tétraèdre présente peu d'intérêt.

On procède maintenant à la comparaison entre les divers polyèdres, pour ce qui est de l'efficacité et de la précision du calcul. On prendra deux points de vue de comparaison :

(i) la distance d est donnée, la même dans les deux cas. On compare alors un réseau icosaédrique à un réseau cubique de même résolution minimale sur la sphère.

(ii) le nombre de points N est donné, le même dans les deux cas. On compare alors un réseau icosaédrique à un réseau cubique de même résolution moyenne sur la sphère.

A) *Efficacité du calcul*

La vitesse du calcul dans le cas ou N est fixé est mesurée par $\Delta t/k$, k étant le nombre de directions principales ; $k = 3$ pour l'icosaèdre, l'octaèdre et le tétraèdre, $k = 2$ pour le cube, et Δt le pas maximum dans le temps, donné pour les équations linéarisées par le critère de Courant-Friedrichs-Lévy. Les équations linéarisées s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\phi_0}{g} \frac{\partial}{\partial x^i} (g g^{ij} u_i) = 0$$

Δt étant déterminé exclusivement par les ondes les plus courtes, on peut écrire :

$$u_j \frac{\partial}{\partial x^i} (g g^{ij}) \ll g g^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x^i}$$

et remplacer l'équation de continuité par l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_0 g^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = 0$$

L'étude classique de la stabilité linéaire conduit alors au critère :

$$g^{ij}\,\tilde{\lambda}_i\,\tilde{\lambda}_j\,\phi_0\,\Delta t^2 \leqslant 1 \qquad (15)$$

avec :

$$i\tilde{\lambda}_i = \frac{\delta}{\delta x^i}\, e^{i\lambda_k x^k}\Big|_{x^k=0}$$

On obtient le critère de Courant-Friedrichs-Levy en majorant le premier membre de (15) pour les valeurs de λ_k appartenant au domaine tronqué du spectre, défini par la grille. Pour une grille carrée :

$$\lambda_k \leqslant \frac{\pi}{d}$$

Pour une grille hexagonale (cf. II.d), le point (λ_1, λ_2) est intérieur à l'hexagone hachuré sur la figure 1. Les majorations conduisent à la valeur de t dans les deux cas.

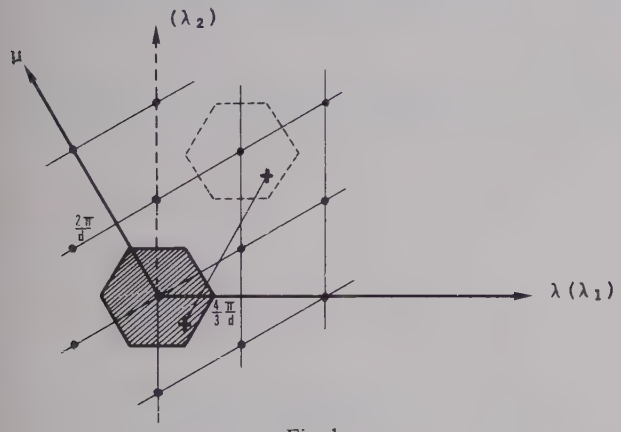

Fig. 1

Dans le cas où d est fixé, l'efficacité est mesurée par la quantité $\Delta t/kN$, où N est déterminé par d. On obtient ainsi le tableau suivant :

Vitesse de calcul

	Icosaèdre	Octaèdre	Cube	Tétraèdre
N donné	1.16	0.82	1.08	0.44
d donné	0,76	0.34	0.36	0.064

L'icosaèdre est encore une fois le polyèdre le plus efficace. Le tétraèdre peut être écarté définitivement. On se bornera désormais à une comparaison entre l'icosaèdre et le cube.

B) *Précision du calcul*

L'allure géométrique du réseau cubique sur la sphère au voisinage d'un point frontière M est représentée sur la figure 4. (Pour l'allure générale des réseaux cubiques et icosaédriques, on peut se référer aux figures 2 et 3). L'approximation des dérivées le long de la frontière est manifestement du second ordre au point H. On peut donc définir l'ordre de grandeur e de l'erreur de troncature globale comme l'intégrale, sur l'ensemble des frontières S_{nm}, de la longueur HM. Si l'on se réfère toujours aux notations de la figure (11), on a :

$$|HM| = d\,\cos\alpha\,\sqrt{g_{11}}$$

$$\cos\alpha = \frac{|g_{12}|}{\sqrt{g_{11}\,g_{12}}}$$

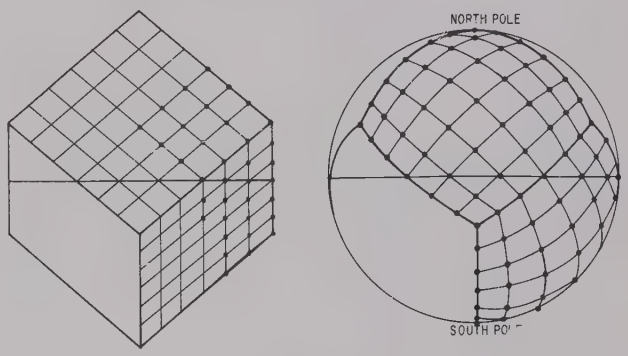

Fig. 2

Exemple de réseau cubique.

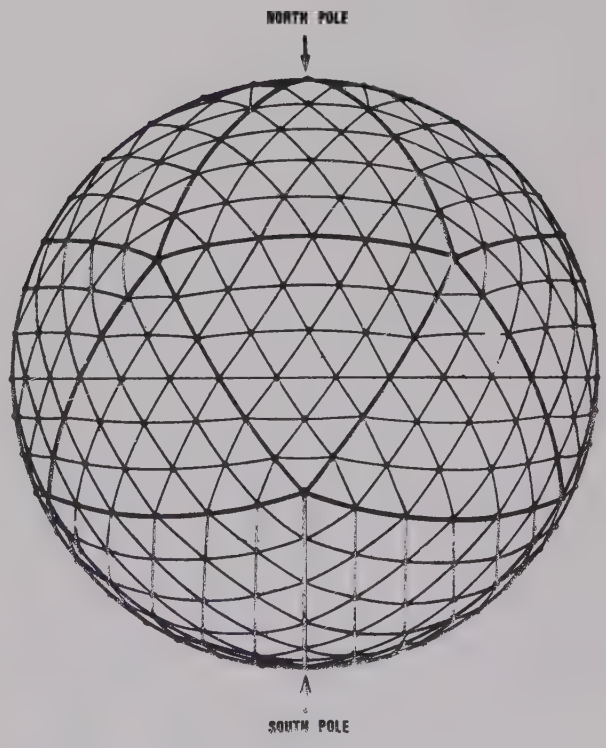

Fig. 3

Exemple de réseau icosaédrique.

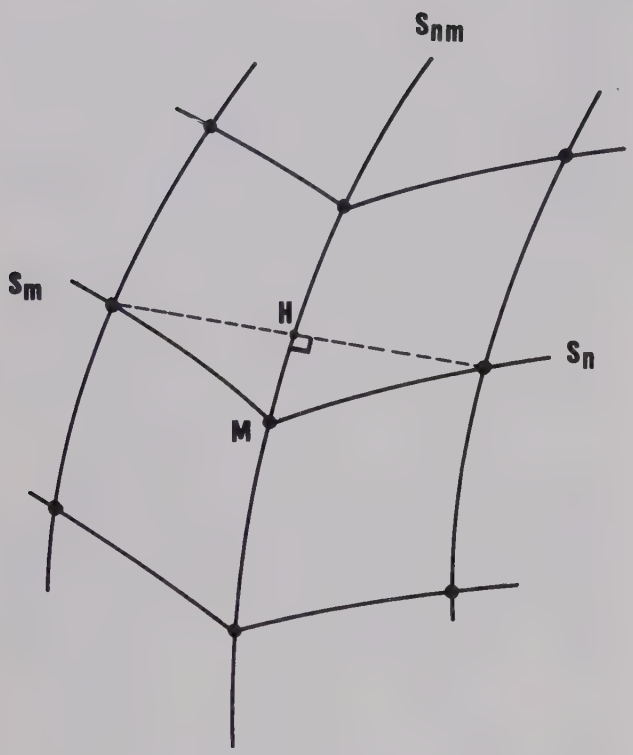

Fig. 4

On désigne par :

$a\beta$ la distance du centre de P_n à P_{nm}.

$a\gamma$ la longueur de la demi-arête P_{nm}.

x l'abscisse de M sur P_{nm} à partir du milieu de P_{nm}.

p le nombre d'arêtes P_{nm}.

On obtient dans ces conditions :

$$e = dp \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \int_0^{a\gamma} \frac{2x\,dx}{x^2 + a^2(1+\beta^2)}$$

d'où

$$e = dp \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \operatorname{Log} \frac{1+\beta^2+\gamma^2}{1+\beta^2}$$

La même méthode est appliquée au cas de l'icosaèdre, et on obtient le tableau suivant :

Erreur de troncature globale

	Icosaèdre	Cube
N donné	$3.96\,d$	$4.59\,d$
d donné	$14.35\,\frac{a}{\sqrt{N}}$	$22.5\,\frac{a}{\sqrt{N}}$

L'onde parasite est donc plus faible dans le cas de l'icosaèdre. Ceci tient au fait que les frontières, quoique plus nombreuses, sont plus courtes et s'écartent moins de leur point médian où l'erreur s'annule au premier ordre (H coïncide alors avec M).

Un quatrième avantage de l'icosaèdre tient à la meilleure isotropie du réseau hexagonal. C'est donc le polyèdre le plus efficace à tous les points de vue.

e) Exemples d'intégrations numériques sur des réseaux cubiques

Le schéma défini au paragraphe précédent a pour inconvénient essentiel d'être du premier ordre seulement sur les frontières. Dans le cas du cube on peut définir un schéma à peine moins simple, qui a la propriété d'être du second ordre partout. C'est la raison pour laquelle les tests ont été effectués sur le cube, afin de comparer ce schéma au schéma (14).

L'opérateur du second ordre est défini par un opérateur ϵ_j non homogène, le long d'une direction principale :

$$\epsilon_j \phi(m_{2p}) = \frac{1}{4d}(m_{2p-2}) - 4\phi(m_{2p-1}) + 4\phi(m_{2p+1}) - \phi(m_{2p+2})) \qquad (16)$$

$$\epsilon_j \phi(m_{2p+1}) = \frac{1}{2d}(\phi(m_{2p+2}) - \phi(m_{2p}))$$

Ce schéma est une combinaison linéaire de deux schémas centrés simples, l'un défini sur le réseau $\widetilde{P}$, l'autre défini sur le réseau formé des points d'indice impair seulement. Il possède donc les propriétés de conservation requises. En un point frontière d'indice pair, la "fermeture" du schéma peut s'écrire :

$$\lambda_j \phi(m\ ) = \frac{1}{2d}(-\phi(m_2) + 4\phi(m_1) - 3\phi(m_0))$$

qui est une approximation du second ordre de la dérivée suivant y^j. La "fermeture" en un point d'indice impair serait du premier ordre seulement. Si l'on veut que (16) donne naissance à des opérateurs δ_i du second ordre partout, il faut et il suffit qu'il y ait un nombre impair de points dans toute rangée de $\widetilde{P}_n$ parallèle à une direction principale. Ceci n'est manifestement pas réalisé si $\widetilde{P}_n$ est un réseau en triangle, où la parité de ce nombre alterne suivant la rangée. Dans ces conditions, (16) définit un schéma du second ordre uniquement sur des réseaux cubiques, quand la longueur de l'arête est un multiple pair de d.

Les défauts du schéma (16) sont les suivants : ce n'est pas un schéma homogène ; l'alternance dans

la définition des différences finies entraîne une alternance pour l'erreur de troncature aux points d'indices pairs et impairs ; on peut s'attendre, dans ces conditions, à l'apparition d'une onde parasite, de longueur d'onde $2d$; le schéma aux points d'indice pair est très étalé pour un schéma du second ordre, ce qui entraîne des propriétés de dispersion médiocres.

Les schémas (14) et (16) ont été comparés à l'aide de divers tests numériques. A cet effet, on a appliqué le cube sur la sphère de façon que les deux pôles soient les images de deux sommets opposés. Les six faces jouent alors un rôle identique par rapport à l'axe de rotation de la terre (figure 2). Néanmoins, quelle que soit la disposition adoptée, le moment angulaire de l'écoulement n'est pas défini de façon simple, car les points du réseau ne sont jamais disposés suivant des parallèles. Dans la mesure où le moment angulaire n'est pas une quantité quadratique, sa conservation exacte est d'un intérêt secondaire. Toutefois, il a paru souhaitable, étant donné la disposition des points, de commencer les tests par la simulation numérique d'un écoulement stationnaire non-divergent à symétrie axiale, dit encore "rotation solide". Cet écoulement, défini par les champs initiaux

$$u = u_0 \sin \mu$$

$$v = 0$$

$$\phi = \phi_0 + \left(a u_0 \Omega + \frac{1}{2} u_0^2\right) \cos^2 \mu$$

donne lieu à une résolution numérique non-triviale dans le cas de réseaux polyédriques.

On s'est donné d'abord un réseau de 866 points, correspondant à une longueur de maille dont le maximum avoisine 1 000 km sur la sphère. L'approximation spatiale est définie par le schéma (16), l'approximation temporelle est l'approximation centrée à trois points, avec un pas de 12 minutes. On a choisi :

$$u_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$$

$$\phi_0 = 98\,100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Les résultats au bout de cinq jours d'intégration sont visibles sur la figure 5. L'onde parasite sur ϕ est extrêment faible, elle ne croît pas de façon significative après le deuxième jour. On obtient néanmoins des perturbations du champ des vitesses allant jusqu'à 0.6 m s^{-1}. Ces perturbations ne sont pas stationnaires, comme on pourrait s'y attendre en considérant la façon dont elles sont "forcées" par le schéma (16) ; le caractère non-stationnaire est probablement dû au fait que les réseau $\widetilde{P}_n$ sont bornés, et que les diverses ondes parasites inter-agissent les unes sur les autres aux frontières.

S'il y a un effet parasite de grande échelle, et cela est vraisemblable en raison de la périodicité spatiale du réseau, il est extrêmement faible et en tous cas indiscernable sur les cartes.

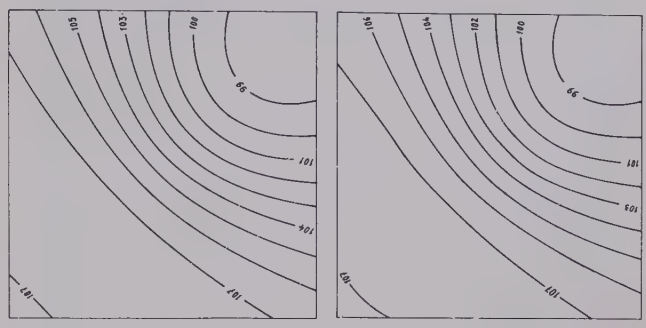

Fig. 5

Evolution du champ du géopotentiel dans le cas de la rotation solide. Les cartes représentent une face du cube dans la projection centrale.

On ne connaît pas de solution analytique des équations (2) sur la sphère, autre que le cas trivial de la rotation solide. Par contre, on connaît des solutions exactes du problème non-divergent, sous la forme d'ondes de Neamtan [3]. On peut admettre qu'une solution du problème (2) qui coïncide à l'instant $t = 0$ avec une onde de Neamtan, s'en écarte peu pour $t > 0$ si la divergence reste faible, c'est-à-dire si l'écoulement reste voisin d'un écoulement géostrophique. De ce fait, les ondes de Neamtan peuvent servir de test à nos méthodes numériques. Nous utiliserons des conditions initiales voisines de celles choisies par Phillips [4] pour tester ses propres méthodes. L'écoulement à $t = 0$ est déterminé par la fonction de courant :

$$\psi(\lambda, \mu, 0) = -a^2 \omega \sin \mu + a^2 \omega \cos^4 \mu \sin \mu \cos 4\lambda$$

qui correspond, dans le cas non-divergent, à la solution :

$$\psi(\lambda, \mu, t) = -a^2 \omega \sin \mu + a^2 \omega \cos^4 \mu \sin \mu \cos 4(\lambda - \theta t)$$

L'onde tourne simplement autour de l'axe des pôles avec la vitesse angulaire :

$$\theta = \frac{14\omega - \Omega}{15}$$

Nous avons pris $\omega = 7.48 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, qui correspond à une période de 7.35 jours pour l'écoulement non-divergent. On sait que la présence d'un champ de divergence suffisamment faible a pour effet principal de freiner légèrement la rotation d'une onde de ce type. On devra donc s'attendre à une période quelque peu supérieure dans nos résultats numériques.

En vue d'obtenir un écoulement à caractère géostrophique, le géopotentiel à $t = 0$ est défini par la condition classique dite de "balance" :

$$\frac{\partial D}{\partial t}(\lambda, \mu, 0) = 0$$

qui contraint la divergence à rester faible dans un voisinage de l'origine des temps. On trouvera l'expression correspondante pour $\phi(\lambda, \mu, 0)$ dans l'article de Phillips [4].

Le premier de nos tests relatifs à l'onde de Neamtan reprend le modèle numérique déjà utilisé dans le cas de la rotation solide. Au bout du cinquième jour d'intégration la vitesse de phase à grande échelle apparaît correcte, mais l'onde parasite atteint une amplitude appréciable (figure 6). Elle est considérablement réduite quand on choisit un réseau plus fin, de 3 458 points (figure 7).

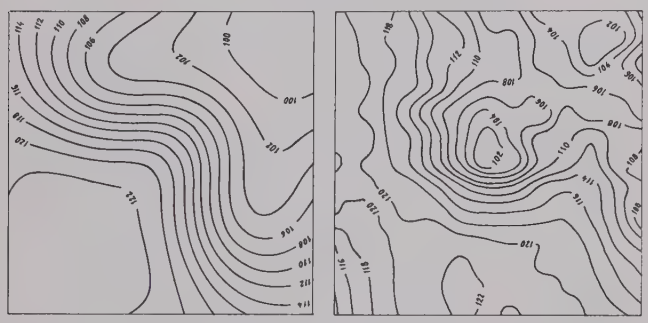

Fig. 6

Onde de Phillips du champ du géopotentiel. Réseau de 866 points.

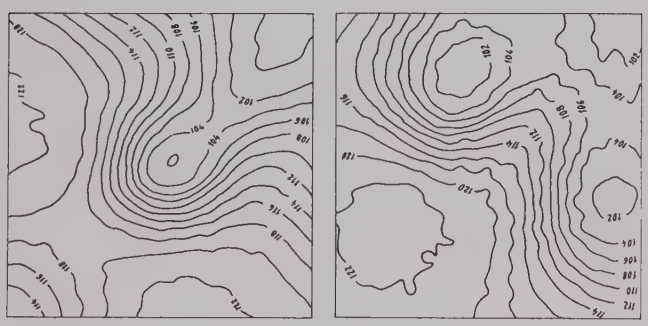

Fig. 7

Intégration numérique de l'onde de Phillips, sur un réseau de 3 458 points, avec le schéma simple centré.

L'approximation simple centrée (14) a été testée à son tour sur le réseau le plus fin. L'amplitude de l'onde parasite est plus faible que dans le cas précédent, comme on peut le vérifier sur la figure 8. Ainsi, dans le schéma (16), la diminution de l'erreur de troncature sur les points frontière se paie par un accroissement de cette erreur en tous les points dont un indice au moins est pair ; la complication du schéma est finalement préjudiciable au calcul. C'est pourquoi nous préconiserons en fin de compte l'emploi du schéma simple, et le choix d'un réseau icosaédrique, le cube n'ayant plus d'intérêt dès lors que l'approximation (16) est abandonnée.

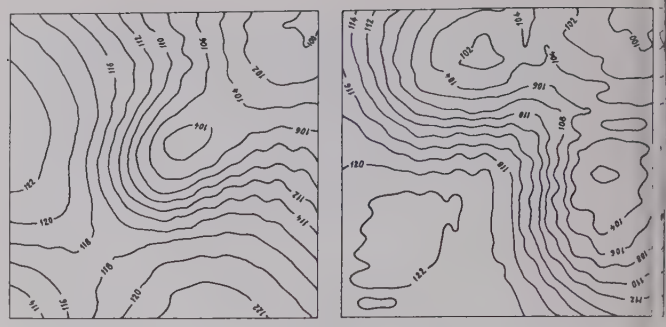

Fig. 8

Intégration numérique de l'onde de Phillips, sur un réseau de 3 458 points, avec le schéma du second ordre.

Dans tous nos tests, la période obtenue est proche de 8 jours, en accord avec les prévisions. Les procédés de filtrage introduits au paragraphe (*d*) ont été testés à leur tour : d'abord un laplacien itéré trois fois, c'est-à-dire un terme du type $\nu_3 \Delta^3 \underline{V}$, ajouté au second membre de l'équation du mouvement. La figure 9 montre que l'amplitude de l'onde de grande échelle n'est pratiquement pas affectée au bout de 8 jours d'intégration, non plus que sa vitesse de phase. Néanmoins, la seconde méthode, où ce terme est remplacé par le terme

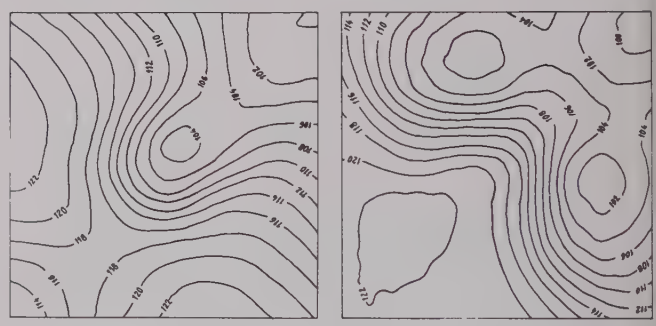

Fig. 9

Intégration numérique de l'onde de Phillips, avec filtrage continu des ondes courtes par un laplacien itéré trois fois.

$$K \text{ grad div } \underline{V}$$

est préférable, parce que beaucoup plus rapide et agissant directement sur la divergence parasite (figure 10).

Conclusion

Dans une première partie (6), nous avons étudié les propriétés spectrales des écoulements de grande échelle, définis soit comme des écoulements strictement non divergents, soit, de façon plus réaliste, comme des écoulements tendant vers la non divergence, au moyen d'un processus d'ajustement géos-

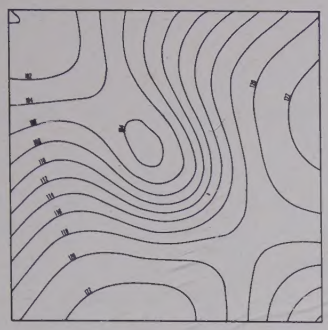

Fig. 10

Intégration numérique de l'onde de Phillips, utilisant le procédé d'amortissement de la divergence. Carte du géopotentiel au jour 4.

trophique, et nous avons lié ces propriétés spectrales à l'existence de certains invariants intégraux des équations de Navier-Stokes. Nous avons ensuite donné des méthodes de discrétisation possédant des propriétés parallèles (7). Ces méthodes s'appliquent sans problème au cas où le domaine de l'écoulement est homéomorphe à un domaine plan, c'est-à-dire au cas où le problème est gouverné par un système unique d'équations scalaires. Dans le cas d'un écoulement sur la totalité de la sphère, on est conduit à envisager une famille de domaines partiels contigus, et de ce fait, à introduire des conditions aux limites internes. Ce faisant, on ne modifie pas formellement le problème, ni les propriétés de conservation des systèmes discrétisés, mais on introduit des erreurs de troncature non négligeables au voisinage des frontières, qui se traduisent par des perturbations de nature agéostrophique. Ces perturbations sont importantes dans le cas de schémas décentrés conservant l'enstrophie potentielle ; elles sont plus faibles pour les schémas conservant seulement la masse et l'énergie, et sont efficacement amorties par le processus d'ajustement géostrophique, formulé comme un processus de dissipation pour la composante divergente de l'écoulement.

Appendice

Dans le but d'obtenir des approximations du second ordre, nous avons systématiquement utilisé des réseaux réguliers plans pour formuler les équations discrétisées. Si le choix d'un réseau régulier va de soi dans le cas d'un domaine homéomorphe à un domaine plan, il n'en est pas de même dans le cas du domaine sphérique tout entier. Par exemple, on peut approcher la sphère par des polyèdres inscrits à N faces, N étant aussi grand qu'on veut ; les réseaux $\widetilde{S}$ définis dans II,b) définissent une suite de tels polyèdres $\widetilde{P}$. A chaque face du polyèdre correspond une maille et une seule du réseau, chaque maille a ainsi son propre système de coordonnées curvilignes définies par l'intermédiaire de la projection centrale correspondante (locale).

On peut ainsi développer une approche locale du problème. Par exemple, prenons un réseau $\widetilde{S}$ dérivé de l'icosaèdre, et définissons les vecteurs vitesse par leurs coordonnées covariantes ou contravariantes locales, aux centres de gravité des faces de $\widetilde{P}$. Le formalisme développé dans la deuxième partie est ici valable, et conduit à des schémas possédant toutes les propriétés de conservation requises, y compris la conservation de l'enstrophie pour un écoulement non-divergent. Seule, la consistance des approximations reste à vérifier.

(i) l'opérateur gradient $\underline{\delta}''$ est toujours du premier ordre, même calculé sur un triangle quelconque.

(ii) l'opérateur $\underline{\delta}''$, antisymétrique du premier, apparaît comme une moyenne d'opérateurs du premier ordre sur les mailles issues d'un même point. Il est donc également du premier ordre.

(iii) l'opérateur A'' est du second ordre, les vecteurs vitesse étant placés aux centres de gravité des faces.

(iv) l'opérateur A', symétrique du premier, est en général du premier ordre seulement (à cause de la non-régularité du polyèdre $\widetilde{P}$).

Le schéma qui en résulte contient la composition $\underline{\delta}''A'$, et n'est donc pas consistant en général. Néanmoins, il existe des réseaux pour lesquels A' est du second ordre. Si l'on désigne par $x^i_{m'}$ $(i = 1,2)$ un système de coordonnées locales au voisinage du point m', et par $A'_{m'} f$ la valeur de $A'f$ au point m', A' est du second ordre si :

$$A'_{m'} x^i_{m'} (m'') = 0 \qquad (17)$$

comme on peut voir immédiatement en effectuant un développement de Taylor. Partant du réseau $\widetilde{S}$ défini dans III à partir d'un icosaèdre, on modifie la position des points par relaxations successives en utilisant les équations (17). Le processus converge rapidement, et on aboutit à un réseau $\overline{S}$ de type icosaèdrique (c'est-à-dire présentant les mêmes propriétés de symétrie et de répétition d'ordre 5 que l'icosaèdre), pour lequel l'opérateur A' est du second ordre. Le schéma proposé dans II est du premier ordre sur $\overline{S}$, il conserve la masse, l'énergie et l'enstrophie. Par contre, l'erreur de troncature est importante, si on la compare aux résultats obtenus dans III.

Manuscrit reçu le 5 avril 1972

REFERENCES

[1] KURIHARA Y., "Numerical integration of the primitive equations on a spherical grid". *Monthly Weather Review,* Vol. 93, No. 7, July 1965.

[2] KURIHARA Y. et HOLLOWAY J. Jr., "Numerical integration of a nine levels global primitive equations model formulated by the box-method". *Monthly Weather Review,* Vol. 95, No. 8, August 1967, pp. 509-530.

[3] NEAMTAN S.M., "The Motion of harmonic waves in the atmosphere". *Journal of Meteorology,* Vol. 3, June 1946, pp. 53-56.

[4] PHILLIPS N., "Numerical integration of the primitive equations in the hemisphere". *Monthly Weather Review,* Vol. 87, No. 9, Sept. 1959.

[5] SADOURNY R., ARAKAWA A. et MINTZ Y., "Integration of the non divergent vorticity equation with an icosaedral hexagonal grid for the sphere". *Monthly Weather Review,* Vol. 96, No. 6, June 1968.

[6] SADOURNY R., "Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géophysique ". (Première partie). *Ann. Géophys.* T. 28, fasc. 4, p. 763.

[7] SADOURNY R., "Approximations en différences finies des équations de Navier-Stokes appliquées à un écoulement géostrophique ». (Deuxième partie). *Ann. Géophys.* T. 28, fasc. 4, p. 775.

[8] WILLIAMSON D., "Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid". *Tellus,* Vol. 20, No. 4, 1968, pp. 642-653.

[9] WILLAMSON D., "Integration of the primitive barotropic model over a spherical geodesic grid". *Monthly Weather Review,* Vol. 98, No. 7, July 1970; pp. 512-520.